

Analiza 1, 4. izpit, 4. 9. 2026

S podpisom potrjujem, da sem izpit reševal/-a samostojno in brez uporabe nedovoljenih pripomočkov.

--	--	--	--	--

1	2	3	4	Σ
---	---	---	---	----------

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Podpis

Čas pisanja je 90 minut. Doseči je možno 100 točk in 8 dodatnih točk. Uporabljate lahko pisalo, geometrijske pripomočke in en list formata A4 z zapiski, ki ga na koncu oddate skupaj z izpitom. Želim vam veliko uspeha!

Naloga 1 [22 točk]

V množici realnih števil $\mathbb{R}$ rešite neenačbo

$$|1 - |x - 1|| < 1.$$

Rešitev zapišite s pomočjo intervalov.

Naloga 2 [25 točk]

Zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je podano s splošnim členom

$$a_n = \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}_{n \text{ korenov}}.$$

- (a) [4 točke] Poiščite rekurzivno zvezo in začetni člen, s katerima lahko podamo zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (b) [12 točk] Dokazite, da je zaporedje monotono.
- (c) [9 točk] Izračunajte limito zaporedja.

Naloga 3 [25 točk + 8 dodatnih točk]

Dana je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+3)}$.

(a) [10 točk] Dokažite, da dana vrsta konvergira. Natančno utemeljite vsak korak.

(Namig: Leibnizov kriterij.)

(b) [15 točk] Naj bo ℓ nenegativno celo število. Dokažite, da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k + \ell)(2k + \ell + 2)} = \frac{1}{2\ell + 4}.$$

(Namig: Izračunajte delne vsote. Uporabite razcep na parcialne ulomke.)

(c) [8 dodatnih točk] Izračunajte vsoto dane vrste.

(Namig: Posebej izračunajte vsoto lihih členov in vsoto sodih členov. Pri računanju vam je lahko v pomoč enakost iz točke (b).)

Naloga 4 [28 točk]

Za poljubni realni števili a in b , definiramo funkcijo $f_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} x^2 + 1: & x \in (-\infty, 0) \\ a \cos(x) + b: & x \in [0, \pi/2] \\ -\frac{4}{\pi}x + 4: & x \in (\frac{\pi}{2}, \infty) \end{cases} .$$

(a) [13 točk] Predpostavimo, da je $a = 1$ in $b = 0$. Narišite graf funkcije $f_{1,0}$, ter določite katere izmed spodnjih trditev držijo (obkrožite DA) in katere ne držijo (obkrožite NE). Vsako izbiro na kratko utemeljite.

• Funkcija $f_{1,0}$ je injektivna. DA NE

• Funkcija $f_{1,0}$ je surjektivna. DA NE

• Funkcija $f_{1,0}$ ima dve točki nezveznosti: 0 in $\frac{\pi}{2}$. DA NE

(b) [15 točk] Določite konstanti a in b tako, da bo funkcija $f_{a,b}$ zvezna povsod. Rešitev utemeljite.