

1	2	3	4	Σ

--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Čas pisanja je 90 minut. Doseči je možno 50 točk. Uporabljate lahko pisalo in en list formata A4 z zapiski, ki ga na koncu oddate skupaj s kolokvijem. Želim vam veliko uspeha!

Naloga 1 [11 točk + 4 dodatne točke]

Zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je podano z začetnim členom $a_1 = 2$ in rekurzivno zvezo $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$, za $n \in \mathbb{N}$. (Predpostavimo lahko, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \geq \frac{3}{4}$.)

The sequence $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is given by the initial term $a_1 = 2$ and the recursive formula $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$, for $n \in \mathbb{N}$. (We may assume that $a_n \geq \frac{3}{4}$ for all $n \in \mathbb{N}$.)

- (a) [9 točk] Dokažite, da je zaporedje monotono in izračunajte njegovo limito.

Prove that the sequence is monotone and compute its limit.

- (b) [2 točki] Ali je zaporedje podano s splošnim členom $a_1 = 4$ in rekurzivno zvezo $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$, za $n \in \mathbb{N}$, konvergentno? Odgovor na kratko utemeljite.

Is the sequence given by the initial term $a_1 = 4$ and the recursive formula $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$, $n \in \mathbb{N}$, convergent? Briefly justify your answer.

- (c) [4 dodatne točke] Obravnavajte konvergenco zaporedij podanih z rekurzivno zvezo $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$, za $n \in \mathbb{N}$, glede na vrednost začetnega člena a_1 . (Namig: Pomagate si lahko s cik-cak diagramom.)

Analyze the convergence of sequences given by the recursive formula $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$, for $n \in \mathbb{N}$, depending on the value of the initial term a_1 . (Hint: You may use the zig-zag diagram.)

Naloga 2 [10 točk]

Izračunajte limiti.

Calculate the limits.

(a) [5 točk] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2+n}}$

(b) [5 točk] $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+2n}{3n^2+1} \right)^n$

Naloga 3 [17 točk]

- (a) [7 točk] Izračunajte vsoto vrste $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+2)}$.

Calculate the sum of the series $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+2)}$.

- (b) [10 točk] Naj bo a pozitivno realno število. Obravnavajte konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a^n}{(2n+3)!!}$.

Let a be a positive real number. Analyze the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a^n}{(2n+3)!!}$.

Naloga 4 [12 točk]

Naj bosta $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji podani s predpisoma:

Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be two functions given by:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x : & x \leq 0 \\ 0 : & x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{2} : & x \leq \frac{\pi}{2} \\ x^2 - \frac{\pi^2}{4} : & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- (a) [3 točke] Narišite grafa funkcij f in g .

Draw the graphs of the functions f and g .

- (b) [5 točk] Poiščite inverz funkcije g .

Find the inverse of the function g .

- (c) [4 točke] Določite predpis za funkcijo $f \circ g$.

Determine $f \circ g$.