Analiza I

Vaje 1

Dokazovanje z matematično indukcijo

Naloga 1. Dokaži, da za vsa naravna števila n veljajo enakosti:

(a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,

(c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(d) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Naloga 2. Dokaži, da za vsa naravna števila n veljajo neenakosti:

(a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$,

(b) $n! \leq 2 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^n$,

(c) $(1+a)^n \leq 1 + (2^n - 1) \cdot a$, kjer je $a \in [0, 1]$

Naloga 3. Dokaži, da n paroma nevzporednih premic v ravnini, od katerih se nobene tri ne sekajo v isti točki, razdeli ravnino na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ delov.

Naloga 4. Dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$\underbrace{\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \ldots + \sqrt{20}}}}}_{n \text{ korenov}} < 5.$$

Naloga 5. Pokaži, da za vsako naravno število n velja:

(a) $6 \mid n^3 - n$

(b) $6 \mid 7n^3 - n$

(c) $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$

(d) $7 \mid 1 + 2^{3n+1} + 2^{6n+2}$