Analiza I

Vaje 0

Ponavljanje osnovnih računskih postopkov

Namen tega gradiva. Pred začetkom predavanj in vaj je pomembno, da dobro obvladate osnovne računske postopke iz srednješolske matematike. Pri predmetu jih bomo redno uporabljali pri poenostavljanju izrazov, zapisovanju formul, dokazovanju in reševanju problemov. V tej zbirki boste našli naloge, s katerimi lahko ponovite in utrdite nekatere temeljne lastnosti ter računske postopke, ki jih boste pri predmetu potrebovali.

Vaja 1. Izračunaj:

a) $\sqrt[3]{0,027} \cdot (0,81)^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2+\sqrt{(-1)^2}} \cdot \sqrt{\dfrac{0,16}{\frac{1}{25}}}$.

b) $\dfrac{1,94 - \sqrt[3]{(-1)^5} - \left(\frac{50}{27}\right)^{-1}}{\frac{\sqrt{24\sqrt{2}}}{\sqrt{75}}}$.

Vaja 2. Z uporabo lastnosti potenc dokaži, da velja:

$$\sqrt[3]{7^{3n+9} + 42 \cdot 7^{3n+8} + 49 \cdot 7^{3n+7}} \cdot \frac{7^6}{2 \cdot 7^{n+9}} + 1 = 2.$$

Vaja 3. Določi resničnost oziroma neresničnost naslednjih trditev. Resnične trditve utemelji, za vsako neresnično trditev pa navedi protiprimer.

a) $\sqrt[4]{16} = 2$.

b) $\sqrt[6]{(-4)^6} = -4$.

c) $\sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$.

d) $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3$.

e) $(2 - \sqrt{5})^2 = 4 - 5$.

f) $\sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{5+20}$

Vaja 4. Poenostavi izraz in navedi pogoje za spremenljivko:

$$\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) : \frac{x^2+x+1}{x^2-1}.$$

Vaja 5. Poenostavi izraz:

$$\frac{(a^{-2}b^3)^2 \cdot a^5 b^{-1}}{(ab^{-2})^{-2}}, \qquad a, b \neq 0.$$

Vaja 6. Racionaliziraj imenovalec in poenostavi rezultat:

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}.$$

Vaja 7. Poenostavi korenski izraz:

$$\sqrt{27 - 10\sqrt{2}} + \sqrt{12 + 6\sqrt{2}}.$$

Vaja 8. Poišči ostanek pri deljenju polinoma $p(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 - 7x + 4$ s polinomom $x^2 - x - 2$.

Vaja 9. Reši enačbo:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \frac{x - 3}{x + 1}.$$

Vaja 10. Reši enačbo: $\sqrt{x + 5} - \sqrt{x - 1} = 2$.

Vaja 11. Reši enačbo: $\sqrt{2x + 3} = x$.

Vaja 12. Reši neenačbo:

$$\frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 3)(x + 4)} \leq 0.$$

Vaja 13. Določi vse realne vrednosti parametra a, za katere neenačba

$$x^2 - 2ax + a^2 - 1 < 0$$

ima natanko dve celi rešitvi.

Vaja 14. Reši eksponentno enačbo: $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Vaja 15. Reši eksponentno enačbo: $3^{x+1} + 3^{1-x} = 10$.

Vaja 16. Reši logaritemsko enačbo: $\log_2(x - 1) + \log_2(x - 3) = 3$.

Vaja 17. Reši sistem enačb:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

Vaja 18. Reši sistem enačb:

$$\begin{cases} x + y = xy, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Vaja 19. Za katere realne vrednosti parametra m ima enačba $x^2 - (m + 2)x + 2m = 0$ dve različni pozitivni rešitvi?

Vaja 20. Naj bosta x_1 in x_2 ničli polinoma $x^2 - 6x + 1$. Brez izračunavanja ničel določi vrednost izraza

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}.$$