Delovni list 1: Racionalna števila niso polna

V analizi pogosto uporabljamo trditev, da ima vsaka neprazna navzgor omejena množica supremum. Na tem listu boste ugotovili, ali to velja v racionalnih številih. V celotnem listu naj bo

$$A = \{\, q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ ali } q^2 < 2 \,\}.$$

Naloga 1 (ogrevanje). Za vsako število izračunajte kvadrat in odločite, ali je v A.

q	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	-5
q^2					
$q \in A\,?$					

Naloga 2. Ali je množica A navzgor omejena? Zapišite tri različne racionalne zgornje meje množice A.

Naloga 3. Dokažite: $\sqrt{2}$ ni racionalno.

Naloga 4 (vedno boljši približek). Za pozitiven $q \in \mathbb{Q}$ definiramo

$$q' = \frac{2q+2}{q+2}.$$

a) Izračunajte q' za $q = 1$, nato za dobljeni q' in še enkrat. Ali so dobljena števila v A?

b) Izračunajte q' za $q = \frac{3}{2}$. Je $\frac{3}{2}$ zgornja meja za A? Je q' zgornja meja? Kateri je manjši?

c) Algebrsko preverite

$$q'^2 - 2 = \frac{2(q^2-2)}{(q+2)^2}, \qquad q' - q = \frac{2-q^2}{q+2}.$$

Naloga 5 (sklep). S pomočjo prejšnje naloge utemeljite:

a) Množica A nima največjega elementa. *(Namig: če je $q \in A$ in $q > 0$, kaj velja za q'?)*

b) Med racionalnimi zgornjimi mejami množice A ni najmanjše.

c) Ali ima A supremum v $\mathbb{Q}$? _____

★ **Naloga 6.** Funkcija $f(x) = x^2 - 2$ je na $[1, 2]$ zvezna, $f(1) < 0$ in $f(2) > 0$. Ali ima ničlo, če gledamo le racionalne x? Kateri izrek iz analize v $\mathbb{Q}$ torej ne velja?

★ **Naloga 7.** Zaporedje $1, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{24}{17}, \ldots$ iz naloge 4 je naraščajoče in omejeno. Ali ima limito v $\mathbb{Q}$? Zakaj ne?

Kaj smo spoznali

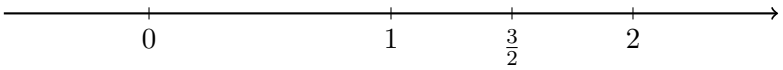
Dopolnite.

1. Množica A je navzgor omejena, v $\mathbb{Q}$ pa nima _____.
2. Vsak racionalni približek za $\sqrt{2}$ lahko _____: v A ni največjega elementa, med zgornjimi mejami ni _____.
3. Zato v $\mathbb{Q}$ ne velja izrek o _____, prav tako ne izrek o vmesnih vrednostih in izrek o konvergenci monotonih omejenih zaporedij.
4. Racionalna števila imajo _____. Za analizo potrebujemo večjo množico števil, v kateri ima vsaka neprazna navzgor omejena množica supremum.

Delovni list 2: Rezi – števila kot množice

Na listu 1 smo našli luknjo v $\mathbb{Q}$. Luknje ne moremo opisati s številom, ki ga še nimamo. Lahko pa jo opišemo z množico vseh racionalnih števil, ki ležijo levo od nje.

Naloga 1 (slika). Na številski premici prerežite premico tam, kjer bi moralo biti $\sqrt{2}$, in pobarvajte racionalna števila levo od reza. Pobarvano množico opišite z neenačbami, v katerih nastopajo le racionalna števila.



Definicija. Množica $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$ je *rez*, če velja:

(R1) $\alpha \neq \emptyset$ in $\alpha \neq \mathbb{Q}$,

(R2) če je $p \in \alpha$ in $q \in \mathbb{Q}$, $q < p$, potem je $q \in \alpha$,

(R3) α nima največjega elementa.

Za $r \in \mathbb{Q}$ označimo $r^* = \{\, q \in \mathbb{Q} : q < r \,\}$.

Naloga 2 (kaj je rez?). Za vsako množico ugotovite, ali je rez. Če ni, napišite, kateri pogoj je kršen. Povsod je $q \in \mathbb{Q}$.

Množica	Rez?	Kršen pogoj
$\{q : q < 3\}$		
$\{q : q \leq 3\}$		
$\{q : q > 0\}$		
$\{q : q < 0 \text{ ali } q^2 < 2\}$		
$\{q : q^2 < 2\}$		
$\mathbb{Q}$		
$\{q : q < 0\} \cup \{1\}$		
$\{q : q < 0 \text{ ali } q^3 < 5\}$		
$\{q : q < \frac{1}{n} \text{ za neki } n \in \mathbb{N}\}$		
$\{q : q < \frac{1}{n} \text{ za vse } n \in \mathbb{N}\}$		

Naloga 3 (zakaj pogoj (R3)?). Množici $\{q : q < 1\}$ in $\{q : q \leq 1\}$ se razlikujeta le v enem elementu. Kateremu *številu* bi ustrezala vsaka od njiju? Kaj bi se zgodilo, če pogoja (R3) ne bi zahtevali? Ali poznate podobno težavo pri decimalnih zapisih?

Naloga 4 (osnovna lema). Naj bo α rez, $p \in \alpha$ in $q \notin \alpha$. Dokažite, da je $p < q$. *(Namig: kaj bi sledilo iz (R2), če bi bil $q \leq p$?)* Narišite, kaj lema pove na sliki.

Naloga 5 (racionalni rezi).

a) Dokažite, da je r^* rez.

b) Kateri rezi iz naloge 2 so oblike r^*?

c) Ali je rez $\{q : q < 0 \text{ ali } q^2 < 2\}$ oblike r^*? Utemeljite s pomočjo lista 1.

★ **Naloga 6.** Zapišite rez, ki ustreza številu $\sqrt{3}+1$, z neenačbami, v katerih nastopajo le racionalna števila.

Kaj smo spoznali

Dopolnite.

1. Luknjo ali število opišemo z množico vseh racionalnih števil _____. Taki množici rečemo _____.
2. Pogoj (R2) pove, da rez vsebuje vsa racionalna števila levo od svojih elementov. Pogoj (R3) zagotovi, da ima vsako število _____ zapis.
3. Vsak element reza je _____ od vsakega racionalnega števila, ki ni v rezu.
4. Racionalnemu številu r ustreza rez r^*. Rez za $\sqrt{2}$ _____ te oblike.
5. Realna števila definiramo kot _____.

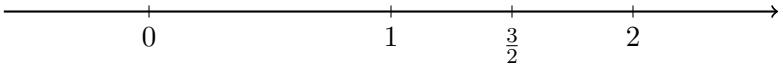
Delovni list 3: Urejenost, polnost in seštevanje

> $\mathbb{R}$ definiramo kot množico vseh rezov. Preverili bomo, da se z rezi da primerjati, iskati supremume in računati. Kot na listu 2 je $r^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$.

A: Urejenost in polnost

Definicija. Za reza α, β je $\alpha \leq \beta$ natanko tedaj, ko $\alpha \subseteq \beta$.

Naloga 1. Na isto premico narišite reza 1^* in $\left(\frac{3}{2}\right)^*$ ter rez za $\sqrt{2}$. Uredite jih po velikosti. Zakaj je smiselno, da je *manjši* rez podmnožica *večjega*?



Naloga 2 (vsaka dva reza sta primerljiva). Naj bosta α, β reza in $\alpha \not\subseteq \beta$. Dopolnite dokaz, da je $\beta \subseteq \alpha$.

1. Ker $\alpha \not\subseteq \beta$, obstaja p, za katerega je $p \in$ _____ in $p \notin$ _____.
2. Naj bo $q \in \beta$. Po osnovni lemi z lista 2 (uporabljeni za β) je q _____ p.
3. Ker je $p \in \alpha$ in $q < p$, iz pogoja _____ sledi $q \in \alpha$.
4. Torej je $\beta \subseteq \alpha$.

Za poljubni množici to ne velja. Poiščite dve podmnožici $\mathbb{Q}$, od katerih nobena ni vsebovana v drugi.

Naloga 3 (supremum kot unija).

a) Naj bo $\mathscr{A} = \{\, (1 - \frac{1}{n})^* : n \in \mathbb{N} \,\}$. Izračunajte unijo vseh rezov iz $\mathscr{A}$. Kateri rez dobite? Ali je to supremum družine $\mathscr{A}$?

b) Naj bo $\mathscr{A} = \{\, r^* : r \in \mathbb{Q},\ r > 0,\ r^2 < 2 \,\}$. Izračunajte unijo. Primerjajte z listom 1: kaj se je zgodilo z luknjo?

Naloga 4 (izrek o supremumu). Naj bo $\mathscr{A}$ neprazna družina rezov in β rez, da je $\alpha \subseteq \beta$ za vse $\alpha \in \mathscr{A}$. Naj bo

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} \alpha.$$

a) $\gamma \neq \emptyset$, ker _____.

b) $\gamma \neq \mathbb{Q}$, ker je $\gamma \subseteq$ _____ in _____ $\neq \mathbb{Q}$.

c) Pogoj (R2): če je $p \in \gamma$, je $p \in \alpha$ za neki $\alpha \in \mathscr{A}$. Za $q < p$ je $q \in$ _____, torej $q \in \gamma$.

d) Pogoj (R3): dokažite, da γ nima največjega elementa.

e) Utemeljite, da je γ zgornja meja za $\mathscr{A}$.

f) Naj bo δ katerakoli zgornja meja za $\mathscr{A}$. Utemeljite, da je $\gamma \subseteq \delta$.

g) Kaj ste s tem dokazali?

★ **Naloga 5.** Ali je presek rezov $\left(\frac{1}{n}\right)^*$, $n \in \mathbb{N}$, rez? Kaj to pove o iskanju infimuma s presekom?

B: Seštevanje

Definicija. Za reza α, β je

$$\alpha + \beta = \{\, a + b : a \in \alpha,\ b \in \beta \,\}.$$

Naloga 6. Preverite, da je $1^* + 2^* = 3^*$.

a) Pokažite inkluzijo $\subseteq$.

b) Za inkluzijo $\supseteq$: naj bo $q < 3$. Poiščite $a < 1$ in $b < 2$, da je $a + b = q$. *(Namig: razliko* $3 - q$ *razdelite na pol.)*

Naloga 7. Dokažite, da je $\alpha + \beta$ rez za poljubna reza α, β. Pri pogoju $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$ uporabite $p \notin \alpha$ in $q \notin \beta$ ter pokažite, da $p + q \notin \alpha + \beta$.

Naloga 8 (ničla). Naj bo $0^* = \{q : q < 0\}$. Dokažite $\alpha + 0^* = \alpha$.

$\subseteq$: Če je $a \in \alpha$ in $q < 0$, zakaj je $a + q \in \alpha$?

$\supseteq$: Naj bo $p \in \alpha$. Kateri pogoj iz definicije reza zagotovi, da obstaja $r \in \alpha$, $r > p$? Zapišite p kot vsoto elementa α in elementa 0^*.

★ **Naloga 9 (iščemo nasprotni element).**

a) Prvi predlog: $-\alpha = \{\, -p : p \notin \alpha \,\}$. Izračunajte to množico za $\alpha = 1^*$. Ali je rez? Kateri pogoj je kršen?

b) Popravljena definicija:

$$-\alpha = \{\, p \in \mathbb{Q} : \text{obstaja } r > 0, \text{ da je } -p - r \notin \alpha \,\}.$$

Izračunajte $-\alpha$ za $\alpha = 1^*$. Ali dobite $(-1)^*$?

c) S svojimi besedami pojasnite, čemu služi število r.

★ **Naloga 10.** Dokažite $\alpha + (-\alpha) \subseteq 0^*$.

Kaj smo spoznali

Dopolnite.

1. Supremum navzgor omejene družine rezov je njihova _____. Zato ima $\mathbb{R}$ lastnost supremuma in luknja z lista 1 je _____.
2. Vsoto rezov dobimo s seštevanjem elementov. Ničla je rez _____.
3. Množenje in preostali aksiomi polja se preverijo podobno, le z več primeri. Skupaj dobimo: rezi tvorijo _____, ki vsebuje $\mathbb{Q}$.