AKSIOM 11: ČE JE $a \neq 0$ JE NATANKO ENO OD ŠTEVIL a in $-a$ POZITIVNO (DRUGO JE NEGATIVNO). 0 NI NITI POZITIVNO, NITI NEGATIVNO.

AKSIOM 12: VSOTA $a+b$ in PRODUKT $a \cdot b$ DVEH POZITIVNIH ŠTEVIL a in b JE SPET POZITIVNO ŠTEVILO

OGLED: VIDEO: THE MAP OF MATHEMATICS

9. 10. 2026

SEDAJ DEFINIRAMO RELACIJO $<$: $a < b \overset{def.}{=} b - a$ POZITIVNO ŠT.

OPOMBA: • ŠTEVILO a JE POZITIVNO $\Leftrightarrow a - 0 = a$ POZITIVNO

• $a > b \Leftrightarrow b < a \Leftrightarrow a - b$ POZITIVNO

• ZA a, b POLJUBNI NASTOPI NATANKO 1 OD MOŽNOSTI: $a < b$, $a > b$, $a = b$

OPOMBA: TRANZITIVNOST RELACIJE $<$: $a < b$ in $b < c \Rightarrow a < c$

DOKAZ: RBD: $c - a > 0$

$$c - a = c \underbrace{- b + b}_{=0} - a = \underbrace{(c-b)}_{>0} + \underbrace{(b-a)}_{>0} \overset{A12}{>} 0 \quad \blacksquare$$

Cela št. $\mathbb{Z}$ dobimo tako, da vzamemo $\mathbb{N}$, št. 0 in negativna $\mathbb{N}$.

V $\mathbb{Z}$ definiramo odštevanje: $n - m \overset{def}{=} n + (-m)$

$\Rightarrow$ KOMUTATIVEN (ENOTSKI) KOLOBAR: JE MN. A Z OPERACIJAMA $+$ in $\cdot$ KI ZADOŠČA A1 - A10 RAZEN A8.

Iz kolobarja lahko vsebej naredimo OBSEG ULOMKOV nad tem kolobarjem. PROBLEM: $\exists$ kolobarji, ki imajo "delitelje niča".

Tj. to so taka števila $a \neq 0$ za katera $\exists$ neko št. $b \neq 0$ $\ni$: $a \cdot b = 0$.

Nad takim kolobarjem se ne da narediti obsega ulomkov.

PRIMER: $\mathbb{Z}_6 \overset{def}{=} \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; definiramo $+$ in $\cdot$ kot običajno, le da na koncu po potrebi odštejem večkratnik št. 6:

$3 + 4 = 7 \rightarrow (1)$ $\quad 4 + 5 = (3)$; $2 \cdot 3 = 0$ ($\#0$ $\#0$)

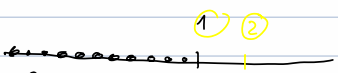
TO JE RAČUNANJE PO MODULO (mod 6)

$\mathbb{Z}_5 \overset{def}{=} \{0, 1, 2, 3, 4\}$

NAJ BO $A \neq 0$, $A \subset M$

DEF.: NEK ELEMENT $m \in M$ JE ZGORNJA MEJA MN. A, ČE $\forall a \in A$, $a \leq m$. A JE NAVZGOR OMEJENA, ČE $\exists$ ZGORNJA MEJA ZA A.

PRIMER: $M = \mathbb{Q}$, $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\}$



1 IN VSAKO ŠT. > 1 JE ZG. MEJA MN. A.

OPOMBA: ČE JE NEK m ZG. MEJA MN. A IN JE $m < m'$, JE TUDI m' ZG. MEJA ZA A.

DEF.: NAJ BO M NEKA UREJENA MNOŽICA IN NAJ BO $A \subset M$ NEPRAZNA NAVZGOR OMEJENA MN.. ELEMENT $m \in M$ SE IMENUJE NATANČNA ZGORNJA MEJA (SUPREMUM) MN. A ($m = \sup A$) ČE VELJATA ZAHTEVI:

(i) m JE ZGORNJA MEJA OD A,

(ii) ČE JE $m' \in M$, $m' < m$, potem m' NI zgornja meja od A (m je najmanjša zg. meja od A)

PRIMER: $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 25\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid -5 < x < 5\}$

$5 = \sup A$

PRIMER 2: $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x, x^2 < 2\}$ GL. DELOVNI LISTI

AKSIOM 13 (DEDEKIND): VSAKA NEPRAZNA, NAVZGOR OMEJENA MNOŽICA $A \subset M$ IMA NATANČNO ZGORNJO MEJO.

↑ AKSIOM POLNOSTI ZA REALNA ŠTEVILA.

Delovni list 1: Racionalna števila niso polna

V analizi pogosto uporabljamo trditev, da ima vsaka neprazna navzgor omejena množica supremum. Na tem listu boste ugotovili, ali to velja v racionalnih številih. V celotnem listu naj bo

$$A = \{\, q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ ali } q^2 < 2 \,\}.$$

Naloga 1 (ogrevanje). Za vsako število izračunajte kvadrat in odločite, ali je v A.

q	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	-5
q^2					
$q \in A$?	DA	DA	NE	NE	DA

Naloga 2. Ali je množica A navzgor omejena? Zapišite tri različne racionalne zgornje meje množice A.

DA → $\frac{3}{2}$, 2, 3

Naloga 3. Dokažite: $\sqrt{2}$ ni racionalno. DOKAZ S PROTISLOVJEM: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, KJER STA m IN $n \in \mathbb{N}$ STA TUJI SI ŠTEVILI: $2 = \frac{m^2}{n^2}$

$m^2 = 2 \cdot n^2 \Rightarrow m^2$ SODO $\Rightarrow m$ SODO: $m = 2 \cdot k \Rightarrow (2 \cdot k)^2 = 2 \cdot n^2$

$4 \cdot k^2 = 2 \cdot n^2 \;/:2$

$2 \cdot k^2 = n^2 \Rightarrow n^2$ SODO $\Rightarrow n$ SOD. ✗

Naloga 4 (vedno boljši približek). Za pozitiven $q \in \mathbb{Q}$ definiramo

$$q' = \frac{2q+2}{q+2}.$$

a) Izračunajte q' za $q = 1$, nato za dobljeni q' in še enkrat. Ali so dobljena števila v A?

$q' = \frac{4}{3}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{24}{17}$ .... $\in A$

b) Izračunajte q' za $q = \frac{3}{2}$. Je $\frac{3}{2}$ zgornja meja za A? Je q' zgornja meja? Kateri je manjši?

$q' = \frac{10}{7}$, OBE STA ZG. MEJI, $\frac{10}{7} < \frac{3}{2}$

c) Algebrsko preverite

$$q'^2 - 2 = \frac{2(q^2-2)}{(q+2)^2}, \qquad q' - q = \frac{2-q^2}{q+2}.$$

DOMAČA VAJA.

Naloga 5 (sklep). S pomočjo prejšnje naloge utemeljite:

a) Množica A nima največjega elementa. *(Namig: če je $q \in A$ in $q > 0$, kaj velja za q'?)*

ZA $q \in A$, $q > 0 \Rightarrow q^2 < 2$, $q'^2 < 2$ $(\Rightarrow q' \in A)$ in $q' - q > 0$.
ZA $q \leq 0$ JE $1 \in A$ VEČJI.

b) Med racionalnimi zgornjimi mejami množice A ni najmanjše.

ZG. MEJA q JE POZITIVNA IN $q^2 \geq 2$ (SICER BI BIL $q \in A$ IN $q' > q$ v A);
$q^2 = 2$ NI MOGOČE, TOREJ JE $q^2 > 2$. POTEM JE $q'^2 > 2$, q' ZGORNJA MEJA IN $q' < q$

c) Ali ima A supremum v $\mathbb{Q}$? NE.

KASNEJE:

★ **Naloga 6.** Funkcija $f(x) = x^2 - 2$ je na $[1, 2]$ zvezna, $f(1) < 0$ in $f(2) > 0$. Ali ima ničlo, če gledamo le racionalne x? Kateri izrek iz analize v $\mathbb{Q}$ torej ne velja?

★ **Naloga 7.** Zaporedje $1, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{24}{17}, \ldots$ iz naloge 4 je naraščajoče in omejeno. Ali ima limito v $\mathbb{Q}$? Zakaj ne?

Kaj smo spoznali

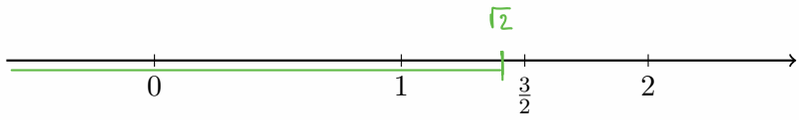
Dopolnite.

1. Množica A je navzgor omejena, v $\mathbb{Q}$ pa nima SUPREMUMA.
2. Vsak racionalni približek za $\sqrt{2}$ lahko IZBOLJŠAMO: v A ni največjega elementa, med zgornjimi mejami ni NAJMANJŠE.
3. Zato v $\mathbb{Q}$ ne velja izrek o SUPREMUMU, (prav tako ne izrek o vmesnih vrednostih in izrek o konvergenci monotonih omejenih zaporedij.) ★
4. Racionalna števila ~~imajo~~ NISO POLNA. Za analizo potrebujemo večjo množico števil, v kateri ima vsaka neprazna navzgor omejena množica supremum.

Delovni list 2: Rezi – števila kot množice

> Na listu 1 smo našli luknjo v $\mathbb{Q}$. Luknje ne moremo opisati s številom, ki ga še nimamo. Lahko pa jo opišemo z množico vseh racionalnih števil, ki ležijo levo od nje.

Naloga 1 (slika). Na številski premici prerežite premico tam, kjer bi moralo biti $\sqrt{2}$, in pobarvajte racionalna števila levo od reza. Pobarvano množico opišite z neenačbami, v katerih nastopajo le racionalna števila.



$\{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0 \ \vee \ q^2 < 2\} = A$

Definicija. Množica $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$ je *rez*, če velja:

(R1) $\alpha \neq \emptyset$ in $\alpha \neq \mathbb{Q}$,

(R2) če je $p \in \alpha$ in $q \in \mathbb{Q}$, $q < p$, potem je $q \in \alpha$,

(R3) α nima največjega elementa.

Za $r \in \mathbb{Q}$ označimo $r^* = \{\, q \in \mathbb{Q} : q < r \,\}$.

Naloga 2 (kaj je rez?). Za vsako množico ugotovite, ali je rez. Če ni, napišite, kateri pogoj je kršen. Povsod je $q \in \mathbb{Q}$.

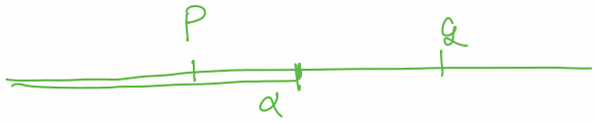
Množica	Rez?	Kršen pogoj
$\{q : q < 3\}$	DA	
$\{q : q \leq 3\}$	NE	(R3)
$\{q : q > 0\}$	NE	(R2)
$\{q : q < 0 \text{ ali } q^2 < 2\}$	DA	
$\{q : q^2 < 2\}$	NE	(R1)
$\mathbb{Q}$	NE	(R1)
$\{q : q < 0\} \cup \{1\}$	NE	(R2) IN (R3)
$\{q : q < 0 \text{ ali } q^3 < 5\}$	DA	
$1^* = \{q : q < \frac{1}{n} \text{ za neki } n \in \mathbb{N}\}$	DA	
$\{q : q < \frac{1}{n} \text{ za vse } n \in \mathbb{N}\}$	NE	(R3)

Naloga 3 (zakaj pogoj (R3)?). Množici $\{q : q < 1\}$ in $\{q : q \leq 1\}$ se razlikujeta le v enem elementu. Kateremu *številu* bi ustrezala vsaka od njiju? Kaj bi se zgodilo, če pogoja (R3) ne bi zahtevali? Ali poznate podobno težavo pri decimalnih zapisih?

$0.999\ldots = 1$

Naloga 4 (osnovna lema). Naj bo α rez, $p \in \alpha$ in $q \notin \alpha$. Dokažite, da je $p < q$. *(Namig: kaj bi sledilo iz (R2), če bi bil $q \leq p$?)* Narišite, kaj lema pove na sliki.

ČE $q < p$ IZ (R2) SLEDI: $q \in \alpha$; ČE JE $q = p$ JE $q \in \alpha$. OBOJE JE PROTISLOVJE, TOREJ: $p < q$



Naloga 5 (racionalni rezi).

a) Dokažite, da je r^* rez.

$r - 1 \in r^*$, $r \notin r^*$; (R2) SLEDI IZ TRANZITIVNOSTI $<$:
ZA $p < r$ JE $\frac{p+r}{2} \in r^*$ IN VEČJI OD p.

b) Kateri rezi iz naloge 2 so oblike r^*? 1^*

c) Ali je rez $\{q : q < 0 \text{ ali } q^2 < 2\}$ oblike r^*? Utemeljite s pomočjo lista 1.

NE.

★ **Naloga 6.** Zapišite rez, ki ustreza številu $\sqrt{3}+1$, z neenačbami, v katerih nastopajo le racionalna števila.

Kaj smo spoznali

Dopolnite.

1. Luknjo ali število opišemo z množico vseh racionalnih števil LEVO OD NJEGA. Taki množici rečemo REZ.
2. Pogoj (R2) pove, da rez vsebuje vsa racionalna števila levo od svojih elementov. Pogoj (R3) zagotovi, da ima vsako število EN SAM zapis.
3. Vsak element reza je MANJŠI od vsakega racionalnega števila, ki ni v rezu.
4. Racionalnemu številu r ustreza rez r^*. Rez za $\sqrt{2}$ NI te oblike.
5. Realna števila definiramo kot MNOŽICO VSEH REZOV.