12.10.2026

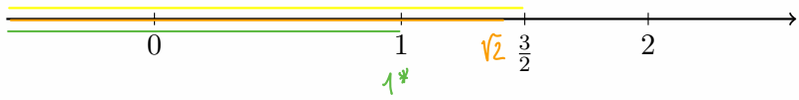
Delovni list 3: Urejenost, polnost in seštevanje

$\mathbb{R}$ definiramo kot množico vseh rezov. Preverili bomo, da se z rezi da primerjati, iskati supremume in računati. Kot na listu 2 je $r^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$.

A: Urejenost in polnost

Definicija. Za reza α, β je $\alpha \leq \beta$ natanko tedaj, ko $\alpha \subseteq \beta$.

Naloga 1. Na isto premico narišite reza 1^* in $\left(\frac{3}{2}\right)^*$ ter rez za $\sqrt{2}$. Uredite jih po velikosti. Zakaj je smiselno, da je *manjši* rez podmnožica *večjega*?



Naloga 2 (vsaka dva reza sta primerljiva). Naj bosta α, β reza in $\alpha \not\subseteq \beta$. Dopolnite dokaz, da je $\beta \subseteq \alpha$.

1. Ker $\alpha \not\subseteq \beta$, obstaja p, za katerega je $p \in$ _____ in $p \notin$ _____.
2. Naj bo $q \in \beta$. Po osnovni lemi z lista 2 (uporabljeni za β) je q _____ p.
3. Ker je $p \in \alpha$ in $q < p$, iz pogoja _____ sledi $q \in \alpha$.
4. Torej je $\beta \subseteq \alpha$.

Za poljubni množici to ne velja. Poiščite dve podmnožici $\mathbb{Q}$, od katerih nobena ni vsebovana v drugi.

Naloga 3 (supremum kot unija).

a) Naj bo $\mathscr{A} = \{\, (1 - \frac{1}{n})^* : n \in \mathbb{N} \,\}$. Izračunajte unijo vseh rezov iz $\mathscr{A}$. Kateri rez dobite? Ali je to supremum družine $\mathscr{A}$?

b) Naj bo $\mathscr{A} = \{\, r^* : r \in \mathbb{Q},\ r > 0,\ r^2 < 2 \,\}$. Izračunajte unijo. Primerjajte z listom 1: kaj se je zgodilo z luknjo?

Naloga 4 (izrek o supremumu). Naj bo $\mathscr{A}$ neprazna družina rezov in β rez, da je $\alpha \subseteq \beta$ za vse $\alpha \in \mathscr{A}$. Naj bo

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} \alpha.$$

a) $\gamma \neq \emptyset$, ker JE $\mathscr{A}$ NEPRAZNA IN SO REZI NEPRAZNI.

b) $\gamma \neq \mathbb{Q}$, ker je $\gamma \subseteq$ β in $\beta \neq \mathbb{Q}$.

c) Pogoj (R2): če je $p \in \gamma$, je $p \in \alpha$ za neki $\alpha \in \mathscr{A}$. Za $q < p$ je $q \in$ α, torej $q \in \gamma$.

d) Pogoj (R3): dokažite, da γ nima največjega elementa.

$p \in \gamma$ poljuben, $\exists$ nek α ∋: $p \in \alpha$: ker α nima maksimuma, torej $\exists$ $p' \in \alpha$, $\alpha \subseteq \gamma$ $\Rightarrow$ $p' > p$.

e) Utemeljite, da je γ zgornja meja za $\mathscr{A}$.

Vsak element $\alpha \in \mathscr{A}$ je vsebovan v uniji : $\alpha \subseteq \gamma$.

f) Naj bo δ katerakoli zgornja meja za $\mathscr{A}$. Utemeljite, da je $\gamma \subseteq \delta$.

$\Rightarrow$ δ vsebuje vse $\alpha \in \mathscr{A}$, Torej vsebuje tudi njihovo unijo.

g) Kaj ste s tem dokazali?

Vsaka neprazna navzgor omejena mn. v $\mathbb{R}$ ima SUPREMUM.

★ **Naloga 5.** Ali je presek rezov $\left(\frac{1}{n}\right)^*$, $n \in \mathbb{N}$, rez? Kaj to pove o iskanju infimuma s presekom?

DV.

B: Seštevanje

Definicija. Za reza α, β je

$$\alpha + \beta = \{\, a + b : a \in \alpha,\ b \in \beta \,\}.$$

Naloga 6. Preverite, da je $1^* + 2^* = 3^*$.

a) Pokažite inkluzijo $\subseteq$.

b) Za inkluzijo $\supseteq$: naj bo $q < 3$. Poiščite $a < 1$ in $b < 2$, da je $a + b = q$. *(Namig: razliko $3 - q$ razdelite na pol.)*

Naloga 7. Dokažite, da je $\alpha + \beta$ rez za poljubna reza α, β. Pri pogoju $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$ uporabite $p \notin \alpha$ in $q \notin \beta$ ter pokažite, da $p + q \notin \alpha + \beta$.

Naloga 8 (ničla). Naj bo $0^* = \{q : q < 0\}$. Dokažite $\alpha + 0^* = \alpha$.

$\subseteq$: Če je $a \in \alpha$ in $q < 0$, zakaj je $a + q \in \alpha$?

$\supseteq$: Naj bo $p \in \alpha$. Kateri pogoj iz definicije reza zagotovi, da obstaja $r \in \alpha$, $r > p$? Zapišite p kot vsoto elementa α in elementa 0^*.

★ **Naloga 9 (iščemo nasprotni element).**

a) Prvi predlog: $-\alpha = \{\, -p : p \notin \alpha \,\}$. Izračunajte to množico za $\alpha = 1^*$. Ali je rez? Kateri pogoj je kršen?

b) Popravljena definicija:

$$-\alpha = \{\, p \in \mathbb{Q} : \text{obstaja } r > 0, \text{ da je } -p - r \notin \alpha \,\}.$$

Izračunajte $-\alpha$ za $\alpha = 1^*$. Ali dobite $(-1)^*$?

c) S svojimi besedami pojasnite, čemu služi število r.

★ **Naloga 10.** Dokažite $\alpha + (-\alpha) \subseteq 0^*$.

Kaj smo spoznali

Dopolnite.

1. Supremum navzgor omejene družine rezov je njihova UNIJA. Zato ima $\mathbb{R}$ lastnost supremuma in luknja z lista 1 je ZAPOLNJENA.
2. Vsoto rezov dobimo s seštevanjem elementov. Ničla je rez 0^*.
3. Množenje in preostali aksiomi polja (OBSEGA) se preverijo podobno, le z več primeri. Skupaj dobimo: rezi tvorijo UREJEN OBSEG, ki vsebuje $\mathbb{Q}$.

IZREK (O OBSTOJU REALNIH ŠTEVIL): OBSTAJA UREJEN OBSEG ŠTEVIL $\mathbb{R}$ (tj. izpolnjuje A1–A12), KI IZPOLNJUJE TUDI A13 IN KI VSEBUJE OBSEG $\mathbb{Q}$ KOT UREJEN PODOBSEG.

IDEJA DOKAZA: DEDEKIND, REZI, GL. DELOVNI LISTI ZGORAJ.

DEFINICIJA:
- OBSEG $\mathbb{Q}$ JE PODOBSEG VEČJEGA OBSEGA $\mathbb{R}$, ČE JE $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ IN ČE SE OPERACIJI $+, \cdot$ NA $\mathbb{Q}$ UJEMATA Z OPERACIJAMA V $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q}$ JE UREJEN PODOBSEG V $\mathbb{R}$ ČE SO POLEG TEGA POZITIVNA ŠT. V MNOŽICI $\mathbb{Q}$ RAVNO TISTA POZITIVNA ŠT. V $\mathbb{R}$, KI PRIPADAJO $\mathbb{Q}$.

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \mathbb{Q}_+ \sim \text{POZITIVNA ŠT. V } \mathbb{Q} \\ \cdot\ \mathbb{R}_+ \sim \text{POZITIVNA ŠT. V } \mathbb{R} \end{array}\right\} \mathbb{Q}_+ = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$