IZREK (O OBSTOJU REALNIH ŠTEVIL): OBSTAJA UREJEN OBSEG ŠTEVIL $\mathbb{R}$ (tj. izpolnjuje A1–A12), KI IZPOLNJUJE TUDI A13 IN KI VSEBUJE OBSEG $\mathbb{Q}$ KOT UREJEN PODOBSEG.

IDEJA DOKAZA: DEDEKIND, REZI, GL. DELOVNI LISTI ZGORAJ.

DEFINICIJA:
- OBSEG $\mathbb{Q}$ JE PODOBSEG VEČJEGA OBSEGA $\mathbb{R}$, ČE JE $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ IN ČE SE OPERACIJI $+, \cdot$ NA $\mathbb{Q}$ UJEMATA Z OPERACIJAMA V $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q}$ JE UREJEN PODOBSEG V $\mathbb{R}$ ČE SO POLEG TEGA POZITIVNA ŠT. V MNOŽICI $\mathbb{Q}$ RAVNO TISTA POZITIVNA ŠT. V $\mathbb{R}$, KI PRIPADAJO $\mathbb{Q}$.

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \mathbb{Q}_+ \sim \text{POZITIVNA ŠT. V } \mathbb{Q} \\ \cdot\ \mathbb{R}_+ \sim \text{POZITIVNA ŠT. V } \mathbb{R} \end{array}\right\} \mathbb{Q}_+ = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$

16.10.2026

Če je M neka urejena množica s relacijo $<$, lahko definiramo pojem:

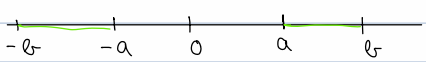
a) SPODJA MEJA: $m \in M$ za množico $A \subset M$, če je $m \leq a$, $\forall a \in A$.

b) NATANČNA SPODNJA MEJA: INFIMUM: $\inf A = m$, če je m SPODNJA MEJA IN JE NAJVEČJA SPODNJA MEJA, tj. noben element $m' \in M$, za katerega je $m < m'$, ni spodnja meja A.

TRDITEV: ČE M ZADOŠČA A13, POTEM IMA VSAKA NEPRAZNA NAVZDOL OMEJENA MNOŽICA $A \subset M$ NATANČNO SPODNJO MEJO.

Če je $A \subset M$, $A \neq \emptyset$, A navzgor omejena, potem je $-A \overset{def}{=} \{-x \mid x \in A\}$ navzdol omejena in velja $\inf(-A) = -\sup(A)$

PRIMER: $A = [a, b] \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, $-A = [-b, -a]$



$\inf(-A) = -b = -\sup(A)$ (pri čemer $b = \sup(A)$)

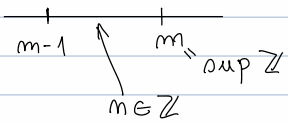
$\inf(A) = a = -\sup(-A) \Rightarrow \sup(-A) = -\inf(A)$

POSLEDICE DEDEKINDOVEGA AKSIOMA:

1° MNOŽICA CELIH ŠTEVIL $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ NI NAVZGOR OMEJENA V $\mathbb{R}$.

DOKAZ: Predpostavimo, da je $\mathbb{Z}$ navzgor omejena, torej ima

$m = \sup \mathbb{Z} \in \mathbb{R}$



Torej $m-1$ ni zgornja meja $\mathbb{Z}$, torej $\exists\, n \in \mathbb{Z}$:

$m - 1 < n \leq m \quad /+1$

$m < n+1 \leq m+1$

$n+1 \in \mathbb{Z}$ ↯

2° ARHIMEDSKA LASTNOST: Naj bosta a in b poljubni pozitivni števili, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$. Potem $\exists\, n \in \mathbb{N} \ni: n \cdot a > b$.

Dokaz: $n > \frac{b}{a} \in \mathbb{R}$ SLEDI NEPOSREDNO IZ 1°

3° ČE JE $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, POTEM $\exists$ RACIONALNO ŠTEVILO $r \in \mathbb{Q} \ni$: $x < r < y$.

DOKAZ: DN.

DEF: • Realno število $x \in \mathbb{R}$, ki ni racionalno, se imenuje IRACIONALNO.

• Realno število a se imenuje ALGEBRAIČNO, če zadošča kakšni polinomski enačbi s celimi koeficienti:

$$c_0 a^n + c_1 \cdot a^{n-1} + \ldots + c_{n-1} \cdot a + c_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}, \; c_0 \neq 0$$

• Iracionalna št., ki niso algebraična, imenujemo TRANSCENDENTNA ŠT. (primer: π, e)

OPOMBA: $\exists\, \infty$ RAZNIH UREJENIH OBSEGOV $\mathcal{O}$, KI ZADOŠČAJO $\mathbb{Q} \subset \mathcal{O} \subset \mathbb{R}$. PRIMER SO T.I. "ŠTEVILSKI OBSEGI", KI JIH DOBIMO $\ni$: K $\mathbb{Q}$ DODAMO ŠE KAKŠNO IRACIONALNO ŠTEVILO, NATO NAREDIMO OBSEG.

PRIMER: $\mathcal{O} = \{a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. DN. PREVERITE, DA JE TA $\mathcal{O}$ OBSEG.

REALNA ŠTEVILA V DECIMALNEM ZAPISU

$x = m_0 + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{10^2} + \dots$, $m_0 \in \mathbb{Z}$ ~ največje število, ki je $\leq x$

↑ celo število

$m_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ največje št. v mn. $\ni$: $m_0 + \frac{m_1}{10} \leq x$

$m_2 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ največje št. $\ni$: $m_0 + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{100} \leq x$

... $\Rightarrow$ DOBIMO ZAPOREDJE ŠTEVIL $x_k = m_0 . m_1 m_2 \dots m_k = m_0 + \frac{m_1}{10} + \dots + \frac{m_k}{10^k}$

$\Rightarrow$ ZAPOREDJE JE NARAŠČAJOČE : $x_k \leq x_{k+1}$, $\forall k \in \{0, 1, \dots\}$ ↑ Q

PO KONSTRUKCIJI : $x_k \leq x \quad \forall k$.

PO A13 IMA MNOŽICA $\{x_0, x_1, x_2 \dots\}$ NATANČNO ZGORNJO MEJO.

TA NATANČNA ZG. MEJA JE KAR ŠT. x.

OPOMBA: . $x = m_0 + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{100} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{10^k}$ $\Rightarrow$ VSOTA NESKONČNE VRSTE

. $m_0 = \lfloor x \rfloor$ CELI DEL ŠTEVILA x (STARA LITERATURA: $[x]$)

. REALNO ŠTEVILO $x = m_0 + \frac{m_1}{10} + \dots$ JE RACIONALNO NATANKO TEDAJ, KO JE PERIODIČNO, T.J. NEKA SKUPINA ŠTEVK V NJEGOVEM ZAPISU SE ZAČNE PONAVLJAT.

. ČE JE $m_k = 0$ $\forall$ k od nekod naprej je število RACIONALNO.

OBSTOJ KORENOV, POTENC IN LOGARITMOV

IZREK: ZA VSAK $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ IN ZA $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists!$ $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$

TAKO DA $y^n = x$. OBSTAJA NATANKO EN

OZNAKA: $y = \sqrt[n]{x}$

OPOMBA: ČE NE ZAHTEVAMO $y > 0$, IZREK ŠE VEDNO VELJA ZA LIHE n, ZA SODE VREDNOSTI n PA DOBIMO DVA KORENA: $\sqrt[n]{x}$, $-\sqrt[n]{x}$

ČE JE n LIHO IN $x<0$, LAHKO ZAPIŠEM $x=-x$:

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$$

DOKAZ: IDEJA: najprej dokažemo enoličnost (y, bi zadoščca izrekuu je en sam) nato obstoj ($E \overset{def}{=} \{t \geq 0 \mid t^n < x\}$, pokažemo $E \neq \emptyset$, E je navzgor omejena, po A13 $\exists\, y = \sup E$, na koncu dokažemo $y^n = x$).

POTENCE: x^y $\quad x>0$, $x \in \mathbb{R}$ BAZA (OSNOVA)

$y \in \mathbb{R}$ POTENCA

a) $y \in \mathbb{Z}$: $\quad y = n \in \mathbb{N}$: $\quad x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n}$

$y = -n$, $n \in \mathbb{N}$: $\quad x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$

$y = 0$: $\quad x^0 = 1$

b) $y \in \mathbb{Q}$: $\quad y = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ $\qquad x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = \sqrt[q]{x^p}$

c) $y \in \mathbb{R}$: $\quad x = 1$: $\quad 1^y = 1$

$x > 1$: $\quad$ če je $y_1 < y_2$, $y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$: $\quad x^{y_1} < x^{y_2}$

$0 < x < 1$: $\quad \frac{1}{x} > 1$, $\quad x^y = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^y} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-y}$

DEFINIRAJMO: $x^y \overset{def}{=} \sup\{x^r \mid r \in \mathbb{Q},\ r \leq y\}$

TAKO DEFINIRANA POTENCA (ZA POLJUBEN EKSPONENT) ZADOŠČA ZNANIM PRAVILOM:

$$x^{y_1} \cdot x^{y_2} = x^{y_1 + y_2}, \quad \left(x^{y_1}\right)^{y_2} = x^{y_1 \cdot y_2}$$