Analiza I

Vaje 1-3

Dodatne Vaje

Naloga 1. Dokaži, da za vsa naravna števila n veljajo enakosti:

(a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(b) $3 + 11 + 19 + \ldots + (8n - 5) = 4n^2 - n$

Naloga 2. Dokaži, da za vsa naravna števila $n \geq 4$ velja neenakost $2^n < n!$.

Naloga 3. Izpelji formulo za število diagonal konveksnega n-kotnika (kjer je $n \geq 4$ naravno število) in jo nato dokaži s popolno matematično indukcijo.

Naloga 4. Pokaži, da za vsako naravno število n velja:

(a) $3 \mid 5^n + 2^{n+1}$

(b) $7 \mid 9^n - 2^n$

Naloga 5. Naj bo n naravno število. Pokaži, da sta $\sqrt{n + \sqrt{n}}$ in $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ iracionalni števili.

Naloga 6. Naj bo $k, m \in \mathbb{N}$ in $\frac{1}{2}\left(\sqrt{k + 4\sqrt{m}} - \sqrt{k}\right) \in \mathbb{Z}$. Dokaži, da je $\sqrt{k}$ racionalno število.

Naloga 7. Določi vsa naravna števila $n \in \mathbb{N}$, tako da sta $\sqrt{n}$ in $\sqrt{n + 2022}$ naravni števili.

Naloga 8. Pokaži, da

(a) $\sqrt{3} + \sqrt{19}$ ni racionalno število

(b) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ ni racionalno število

Naloga 9. Za dane množice določi supremum, infimum, minimum in maksimum, če obstajajo.

(a) $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

(b) $B = \{x^2 - 8x \mid x > 0\}$

(c) $C = \{x \mid x^2 \leq 19\}$

Naloga 10. Določi supremum, infimum, minimum in maksimum dane množice, če obstajajo:

$$A = \{x \in (0, 2) \mid x \text{ ima v decimalnem zapisu vsaj eno enko } \}.$$