Analiza I

Vaje 4

Kompleksna števila

Naloga 1. Naj bodo $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -1 + 4i$, $z_3 = 1 + \sqrt{3}\,i$. Izračunajte

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 z_2, \quad \overline{z_1}, \quad \overline{z_2}, \quad \overline{z_3}, \quad |z_1|, \quad |z_2|, \quad |z_3|.$$

Naloga 2. Izračunajte in poenostavite. Rezultate zapišite v obliki $a + bi$:

(a) $\dfrac{4+2i}{1-i}$,

(b) $\dfrac{3-5i}{2+i}$,

(c) $i^{17} + i^{38} - i^{105} + i^{2026}$,

(d) $(1+i)^2 + (1-i)^3$.

Naloga 3. Skiciraj naslednje podmnožice kompleksnih števil:

(a) $\{z \in \mathbb{C}\colon |z + i + 1| \geq 2\}$,

(b) $\{z \in \mathbb{C}\colon |z - 1| = |z - i|\}$,

(c) $\{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z^2) + i\mathrm{Im}(\overline{z}(1+2i)) = -3\}$,

(d) $\{z \in \mathbb{C}\colon 2(\mathrm{Re}(z))^2 + \mathrm{Im}(z) < 1\}$.

Naloga 4. Zapišite v polarni obliki naslednja kompleksna števila:

(a) $z_1 = \sqrt{3} + i$,

(b) $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$,

(c) $z_3 = -1 - i$,

(d) $z_4 = -3i$.

Naloga 5. V polarni obliki izračunajte naslednje izraze, pri čemer uporabite kompleksna števila iz prejšnje vaje:

(a) z_1^6, (b) $z_2^2 z_3$, (c) $\dfrac{z_3}{z_4}$, (d) z_3^{100}.

Naloga 6. Pokaži, da je izraz $\frac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}$ realno število, če sta z_1 in z_2 kompleksni števili za kateri velja $|z_1| = |z_2| = 1$.

Naloga 7. Poiščite vsa naravna števila n, za katera je število $(1 + i\sqrt{3})^n$

a) pozitivno realno število;

b) negativno realno število;

c) čisto imaginarno število.

Naloga 8. V množici $\mathbb{C}$ reši enačbe:

(a) $z^6 = 1$, (b) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$, (c) $z^2 - (1-4i)z - 5 - 5i = 0$.

Naloga 9. (a) Poiščite vse kompleksne rešitve naslednjih enačb.

$$z^4 = (-\sqrt{3} + i)^6 \qquad v^2 = (-\sqrt{3} + i)^3.$$

(b) Študent predlaga, da izraz $\sqrt[4]{(-\sqrt{3} + i)^6}$ poenostavimo v $\sqrt{(-\sqrt{3} + i)^3}$. Preverite, ali s tem dobimo vse vrednosti prvotnega izraza. Če jih ne, določite, katere vrednosti izpustimo.

Naloga 10. Naj bo $v = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Kompleksna števila določimo rekurzivno s predpisoma

$$z_1 = 1 + v, \qquad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2} \quad \text{za } n \geq 1.$$

Dokažite, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$z_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, & \text{če je } n \text{ liho,} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, & \text{če je } n \text{ sodo.} \end{cases}$$

Sklepajte, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $z_n^6 = 1$.