Analiza 1, teoretični del, študijsko leto 2026/27

1	2	3	4	Σ

Ime in priimek

Vpisna številka

Navodila

- Čas pisanja je 45 minut. Pripomočki (zapiski, knjige, kalkulatorji, telefoni) niso dovoljeni.
- Kjer naloga zahteva dokaz ali utemeljitev, zapišite jasen in popoln argument. Pri dokazih navedite, katere aksiome ali že dokazane izreke uporabljate.
- Definicije in izreke zapišite natančno in navedite vse potrebne pogoje.
- Rešitve pišite na liste z nalogami. Za vsako nalogo je na voljo prostor pod besedilom.

Instructions (English)

- *You have 45 minutes. No aids (notes, books, calculators, phones) are allowed.*
- *Where a proof or justification is required, provide a clear and complete argument. In proofs, state which axioms or previously proved theorems you use.*
- *State definitions and theorems precisely and include all necessary conditions.*
- *Write your solutions on the exam sheets, in the space below each problem.*
- *You may answer in English.*

Naloga 1 [6 točk]

(a) Realna števila tvorijo popoln urejen obseg. Natančno navedite **aksiom popolnosti** (Dedekindov aksiom) v obliki z najmanjšo zgornjo mejo. Pri tem definirajte, kaj pomeni $s = \sup \mathcal{A}$.

The real numbers form a complete ordered field. State the ***completeness axiom*** *(Dedekind's axiom) precisely in terms of the least upper bound. Define what is meant by* $s = \sup \mathcal{A}$.

(b) Dokažite posledico tega aksioma (arhimedsko lastnost): za vsak $x \in \mathbb{R}$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, da velja $n > x$.

Prove the following consequence of this axiom (the Archimedean property): for every $x \in \mathbb{R}$*, there exists* $n \in \mathbb{N}$ *such that* $n > x$.

Naloga 2 [5 točk]

(a) Za $x > 0$ in $n \in \mathbb{N}$ definirajte $\sqrt[n]{x}$. Povejte, kaj zahteva ta definicija glede obstoja in enoličnosti. Dokaz ni potreben.

For $x > 0$ and $n \in \mathbb{N}$, define $\sqrt[n]{x}$. State the existence and uniqueness requirements underlying this definition. No proof is required.

(b) Za $x > 1$ pojasnite definicijo $x^{m/n}$, kjer sta $m \in \mathbb{Z}$ in $n \in \mathbb{N}$. Nato z uporabo supremuma zapišite, kako definiramo x^y za $y \in \mathbb{R}$.

For $x > 1$, explain the definition of $x^{m/n}$, where $m \in \mathbb{Z}$ and $n \in \mathbb{N}$. Then use a supremum to define x^y for $y \in \mathbb{R}$.

(c) Za $b > 1$ definirajte $\log_b x$ in navedite njegovo definicijsko območje ter zalogo vrednosti. Iz definicije in zakona za potenco vsote dokažite

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y \qquad (x, y > 0).$$

For $b > 1$, define $\log_b x$ and state its domain and range. Using the definition and the exponent law $b^{u+v} = b^u b^v$, prove

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y \qquad (x, y > 0).$$

Naloga 3 [6 točk]

(a) Definirajte absolutno vrednost realnega števila. S pomočjo trikotniške neenakosti dokažite

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Define the absolute value of a real number. Use the triangle inequality to prove

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

(b) Za $z = u + iv \in \mathbb{C}$, kjer sta $u, v \in \mathbb{R}$, definirajte $\overline{z}$ in $|z|$. Dokažite $z\overline{z} = |z|^2$ ter izpeljite formulo za z^{-1}, kadar je $z \neq 0$.

For $z = u + iv \in \mathbb{C}$, where $u, v \in \mathbb{R}$, define $\overline{z}$ and $|z|$. Prove that $z\overline{z} = |z|^2$ and derive a formula for z^{-1} when $z \neq 0$.

Naloga 4 [8 točk]

Dano je zaporedje $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
Let $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a real sequence.

(a) Natančno definirajte, kaj je stekališče in kaj je limita zaporedja (a_n).

State precise definitions of a cluster point and a limit of the sequence (a_n).

(b) Dokažite, da ima vsako na obe strani omejeno realno zaporedje vsaj eno stekališče.

Prove that every real sequence that is bounded above and below has at least one cluster point.

(c) Ali iz omejenosti realnega zaporedja sledi njegova konvergenca? Odgovor utemeljite s protiprimerom.

Does boundedness of a real sequence imply convergence? Justify your answer with a counterexample.