• ZAPOREDJA REALNIH ŠTEVIL (OMEJENOST, SUPREMUM, INFIMUM, STEKALIŠČE)

30.10.2026

Če je preslikava bijektivna, lahko definiramo inverzno preslikavo: $f^{-1}: B \to A$, $y \mapsto x$

$f^{-1}(y) = x$ ↑ natančno določen element iz A, za katerega je $f(x) = y$

$f|_A : A \to \mathbb{R}$

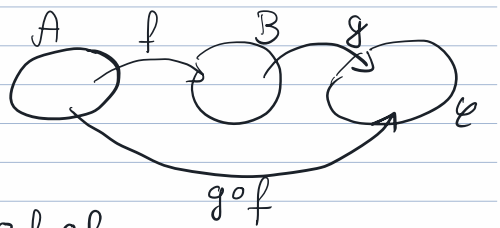
ZOŽITEV f NA MANJŠO DOMENO A

↘ INJEKTIVNOST LAHKO DOSEŽEMO TAKO, DA ZMANJŠAMO DOMENO f

DEFINICIJA: Naj bosta $f: A \to B$ in $g: B \to C$ dani preslikavi.

SESTAVLJENA PRESLIKAVA = KOMPOZICIJA / KOMPOZITUM PRESLIKAV f IN g JE PRESLIKAVA $g \circ f: A \to C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$x \to \boxed{f} \xrightarrow{f(x)} \boxed{g} \to g(f(x)) \in C$



Posplošimo na več členov: $f_m \circ f_{m-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$

$x \to \boxed{f_1} \to \boxed{f_2} \to \dots \to \boxed{f_m} \to g(x)$

PRIMER: f je bijektivna: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f^{-1}} A$

$f^{-1} \circ f = id_A$ (IDENTITETA NA A)

$x \in A$: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, $(f \circ f^{-1})(y) = y \Rightarrow f \circ f^{-1} = id_B$

DEFINICIJA: Množici A in B sta EKVIPOLENTNI = enako močni, če obstaja kakšna bijektivna preslikava $f: A \to B$.

① A JE KONČNA : ČE JE BODISI PRAZNA ALI PA JE EKVIPOLENTNA KAKŠNI OD MNOŽIC $\{1, 2, 3, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$, m = ŠTEVILO ELEMENTOV

$f : \{1, 2, \dots, m\} \xrightarrow[\text{BIJEKTIVNA}]{} A$ $\qquad A = \{\underbrace{f(1)}_{a_1}, \underbrace{f(2)}_{a_2}, \dots, \underbrace{f(m)}_{a_m}\} = \{a_1, \dots, a_m\}$

② A JE ŠTEVNA ali ŠTEVNO NESKONČNA, ČE JE EKVIPOLENTNA MNOŽICI VSEH NARAVNIH ŠTEVIL. To pomeni, da lahko A razvrstimo v zaporedje: $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ $a_i \neq a_j$ za $i \neq j$

③ A JE KONTINUUM, ČE JE EKVIPOLENTNA MNOŽICI $\mathbb{R}$

$|A|$ ← A DOLOČA NEKO KARDINALNO ŠTEVILO, KI PREDSTAVLJA VELIKOST MNOŽICE A

$|A| = |B| \iff A$ in B sta ekvipolentni

① $\Rightarrow |A|$ = število elementov v A

② $\Rightarrow |A| = |\mathbb{N}| = \text{alef}_0$

③ $\Rightarrow |A| = |\mathbb{R}| = \text{alef}$

$A \sim B$ ← pišemo $A \sim B$, če je A ekvipolentna B.

Ta relacija med množicama zadošča naslednjim lastnostim:

(i) $A \sim A$

(ii) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

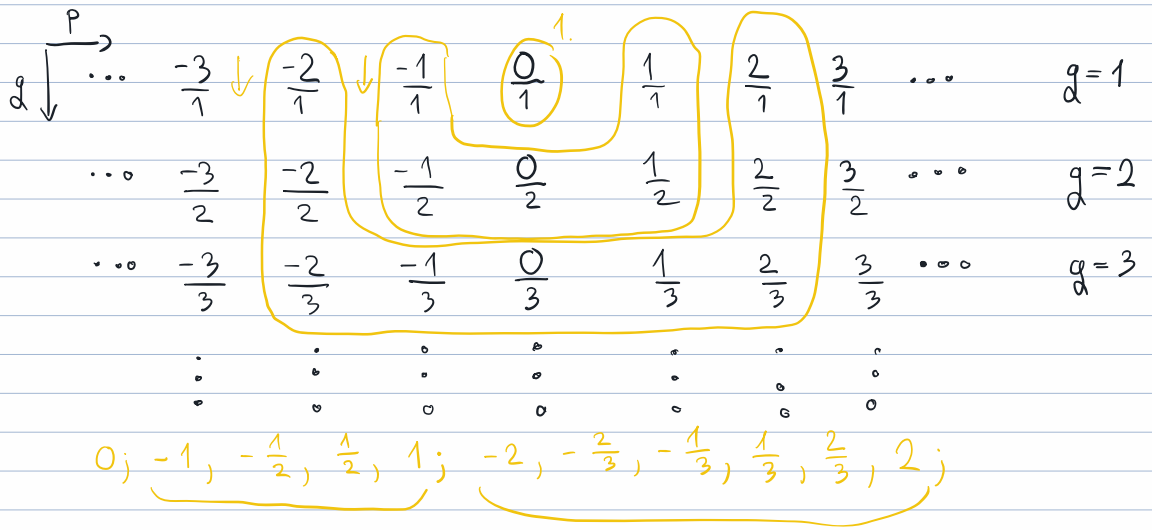
(iii) $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$A \xrightarrow[\text{BIJ.}]{f} B \xrightarrow[\text{BIJ.}]{g} C$ $\qquad g \circ f : A \xrightarrow[\text{BIJ}]{} C$

OPOMBA: VSAKA RELACIJA, KI ZADOŠČA (i), (ii), (iii) SE IMENUJE EKVIVALENČNA RELACIJA.

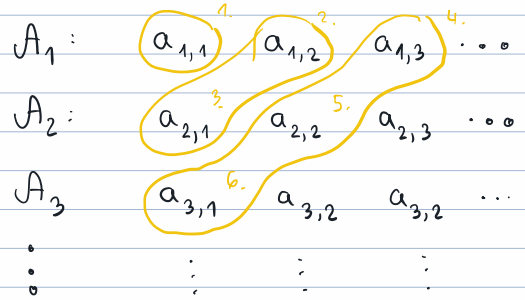
TRDITEV: Množica $\mathbb{Q}$ je števna.

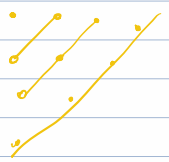
Dokaz: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

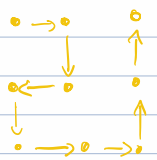


IZREK: ČE JE VSAKA MNOŽICA $A_1, A_2, \ldots$ ŠTEVNA, JE TUDI NJIHOVA UNIJA $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ ŠTEVNA.

DOKAZ:







↓

pazimo le, da razvrstimo vse elemente

TRDITEV: Če je A števna in $B \subset A$, je B končna ali števna.

ZAPOREDJA ŠTEVIL

Primer: $1, 2, 3, 4 \ldots$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

BOLJ SPLOŠNO: $a_1, a_2, a_3 \ldots$ $a_j \in \mathbb{R}$ za $\forall j \in \mathbb{N}$ ← ZAPOREDJE REALNIH ŠTEVIL

DEFINICIJA: ZAPOREDJE REALNIH ŠTEVIL JE PRESLIKAVA IZ $\mathbb{N}$ V $\mathbb{R}$:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$j \mapsto a_j$$

→ ZAPOREDJE JE DOLOČENO S PREDPISOM, KI VSAKEMU NARAVNEMU ŠTEVILU PRIREDI NATANKO DOLOČENO REALNO ŠTEVILO

Primera: a) $a_n = \frac{1}{n}$; $n \in \mathbb{N}$

b) REKURZIVNA FORMULA: $a_1 = a_2 = 1$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2$$

DEF: Zaporedje je navzgor omejeno, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, zanj velja $a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$. (Tj. Zaloga vrednosti preslikave $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}$, je navzgor omejena.)

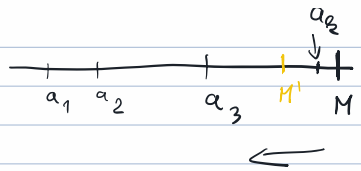
DEF: Zaporedje je navzdol omejeno, če $\exists m \in \mathbb{R}$, da je $m \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

DEF.: Zaporedje je OMEJENO, če je navzgor in navzdol omejeno.

⇒ NATANČNA ZGORNJA MEJA $\sup a_n$ NAVZGOR OMEJENEGA ZAPOREDJA JE NATANČNA ZGORNJA MEJA ZALOGE VREDNOSTI PRESLIKAVE $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

$M = \sup a_n$ natanko takrat, ko velja: (a) $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(b) če je $M' < M \Rightarrow \exists a_k > M'$



NASLEDNJIČ: → STEKALIŠČE ZAPOREDIJ

→ LIMITA ZAPOREDJA → KDAJ JE ZAPOREDJE KONVERGENTNO?