Analiza I

Povzetek 1. vaj

Dokazovanje z matematično indukcijo

Kaj je matematična indukcija?

Matematična indukcija je dokazovalna metoda, ki jo uporabljamo za dokazovanje trditev, odvisnih od naravnega števila n. Ideja je podobna dominam: najprej dokažemo, da pade prva domina, nato pa pokažemo, da pade tudi naslednja, če je padla prejšnja.

Indukcijski dokaz je sestavljen iz dveh glavnih delov. V začetnem koraku preverimo, da trditev velja za prvo obravnavano vrednost n. V indukcijskem koraku predpostavimo, da trditev velja za neko naravno število k; tej predpostavki pravimo indukcijska predpostavka. Nato dokažemo, da iz nje sledi veljavnost trditve za $k+1$.

Če sta oba koraka pravilno izvedena, po načelu matematične indukcije sledi, da trditev velja za vsa naravna števila v danem območju. Pri pisanju dokaza jasno označite začetni korak, indukcijsko predpostavko in indukcijski korak.

Predloga za dokaz z matematično indukcijo

Naj bo $P(n)$ trditev, ki jo želimo dokazati za vsa naravna števila $n \geq n_0$.

Začetni korak. Preverimo trditev za $n = n_0$. Trditev $P(n_0)$ pravi:

(zapišite trditev za $n = n_0$).

To velja, ker ...

Indukcijski korak. Naj bo $k \geq n_0$. Predpostavimo, da velja trditev $P(k)$, to je

(zapišite, kaj pravi $P(k)$).

To predpostavko imenujemo *indukcijska predpostavka*.
Pokazati moramo, da velja tudi $P(k+1)$, to je

(zapišite, kaj pravi $P(k+1)$).

Začnemo z levo stranjo trditve $P(k+1)$:

$$\begin{aligned} \text{leva stran trditve } P(k+1) &= \dots \\ &= \dots \qquad \text{(po indukcijski predpostavki)} \\ &= \dots \\ &= \text{desna stran trditve } P(k+1). \end{aligned}$$

S tem smo dokazali trditev $P(k+1)$.
Sklep. Po načelu matematične indukcije velja trditev $P(n)$ za vsako naravno število $n \geq n_0$.

Načelo matematične indukcije

Naj bo $P(n)$ trditev, odvisna od naravnega števila n. Če velja:

(i) $P(n_0)$ je resnična za začetno naravno število n_0;

(ii) za vsak $k \geq n_0$ iz resničnosti trditve $P(k)$ sledi resničnost trditve $P(k+1)$,

potem je $P(n)$ resnična za vsako naravno število $n \geq n_0$.

Preden začnete dokazovati

Pri vsakem indukcijskem dokazu:

(i) jasno zapišite trditev $P(n)$;

(ii) preverite začetni korak;

(iii) zapišite indukcijsko predpostavko $P(k)$;

(iv) natančno povejte, kaj morate dokazati, torej $P(k+1)$;

(v) označite, kje uporabite indukcijsko predpostavko;

(vi) na koncu zapišite sklep.

Enakosti

Dokažite z matematično indukcijo, da za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Rešitev

Dokaz bomo izvedli v štirih korakih.

1. korak: Zapišemo trditev.

Označimo z $P(n)$ trditev

$$P(n): \qquad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dokazati moramo, da je $P(n)$ resnična za vsako naravno število $n \geq 1$.

2. korak: Preverimo začetni primer.

Preverimo, ali trditev velja za $n = 1$:

$$1^2 = 1 \qquad \text{in} \qquad \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1.$$

Obe strani sta enaki, zato trditev $P(1)$ velja.

3. korak: Zapišemo indukcijsko predpostavko.

Naj bo $k \geq 1$ naravno število. Predpostavimo, da trditev $P(k)$ velja, torej

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

To je indukcijska predpostavka. Zdaj bomo dokazali, da iz nje sledi trditev $P(k+1)$.

4. korak: Dokažemo naslednji primer.

Začnemo z vsoto prvih $k+1$ kvadratov. Uporabimo indukcijsko predpostavko:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{(k+1)\Big(k(2k+1) + 6(k+1)\Big)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

V zadnjem koraku smo uporabili razcep

$$2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3).$$

Ker je

$$(k+1)(k+2)(2k+3) = (k+1)\Big((k+1)+1\Big)\Big(2(k+1)+1\Big),$$

smo dobili pravilo za $n = k+1$. Torej iz $P(k)$ sledi $P(k+1)$.

Zaključek.

Trditev velja za $n = 1$, poleg tega pa iz njene veljavnosti za $n = k$ sledi njena veljavnost za $n = k+1$. Po načelu matematične indukcije zato velja

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

za vsako naravno število $n \geq 1$. □

Dokažite z matematično indukcijo, da za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Rešitev

1. korak: Zapišemo trditev.

Označimo z $P(n)$ trditev

$$P(n): \qquad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. korak: Preverimo začetni primer.

Za $n = 1$ dobimo

$$1^3 = 1 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4}.$$

Zato trditev $P(1)$ velja.

3. korak: Zapišemo indukcijsko predpostavko.

Naj bo $k \geq 1$ naravno število. Predpostavimo, da trditev $P(k)$ velja, torej da je

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

Dokazati moramo, da velja tudi

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

4. korak: Dokažemo naslednji primer.

Uporabimo indukcijsko predpostavko:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{(k+1)^2}{4}\left(k^2 + 4k + 4\right) \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Torej iz $P(k)$ sledi $P(k+1)$.

Zaključek.

Trditev velja za $n = 1$, poleg tega pa iz njene veljavnosti za $n = k$ sledi njena veljavnost za $n = k + 1$.

Po načelu matematične indukcije zato za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

□

Dokažite z matematično indukcijo, da za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Rešitev

1. korak: Zapišemo trditev.

Označimo z $P(n)$ trditev

$$P(n): \qquad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2. korak: Preverimo začetni primer.

Za $n = 1$ dobimo

$$1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}.$$

Zato trditev $P(1)$ velja.

3. korak: Zapišemo indukcijsko predpostavko.

Naj bo $k \geq 1$ naravno število. Predpostavimo, da trditev $P(k)$ velja, torej da je

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k \cdot (k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Dokazati moramo, da velja tudi

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k \cdot (k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

4. korak: Dokažemo naslednji primer.

Uporabimo indukcijsko predpostavko:

$$\begin{aligned} 1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+k\cdot(k+1)+(k+1)(k+2) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)\\ &= (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right)\\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}. \end{aligned}$$

Torej iz $P(k)$ sledi $P(k+1)$.

Zaključek.

Trditev velja za $n=1$, poleg tega pa iz njene veljavnosti za $n=k$ sledi njena veljavnost za $n=k+1$. Po načelu matematične indukcije zato za vsako naravno število $n\geq 1$ velja

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

□

Dokažite z matematično indukcijo, da za vsako naravno število $n\geq 1$ velja

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Rešitev

Dokaz bomo izvedli v štirih korakih.

1. korak: Zapišemo trditev.

Označimo z $P(n)$ trditev

$$P(n):\qquad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Dokazati moramo, da je $P(n)$ resnična za vsako naravno število $n\geq 1$.

2. korak: Preverimo začetni primer.

Za $n=1$ dobimo

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}.$$

Tudi desna stran je

$$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Zato trditev $P(1)$ velja.

3. korak: Zapišemo indukcijsko predpostavko.

Naj bo $k \geq 1$ naravno število. Predpostavimo, da trditev $P(k)$ velja:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

To je indukcijska predpostavka. Zdaj bomo dokazali, da velja tudi trditev $P(k+1)$.

4. korak: Dokažemo naslednji primer.

Vsoti prvih k členov prištejemo naslednji člen, $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$. Nato uporabimo indukcijsko predpostavko:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k+1}{k+2}.
\end{aligned}$$

To je pravilo za $n = k+1$, saj je

$$\frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1}.$$

Torej iz $P(k)$ sledi $P(k+1)$.

Zaključek.

Trditev velja za $n = 1$, poleg tega pa iz njene veljavnosti za $n = k$ sledi njena veljavnost za $n = k+1$. Po načelu matematične indukcije zato velja

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

za vsako naravno število $n \geq 1$. □

Neenakosti

Dokažite z matematično indukcijo, da za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

Rešitev

Dokaz bomo izvedli v štirih korakih.

1. korak: Zapišemo trditev.

Označimo z $P(n)$ trditev

$$P(n): \qquad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

Dokazati moramo, da je $P(n)$ resnična za vsako naravno število $n \geq 1$.

2. korak: Preverimo začetni primer.

Za $n = 1$ dobimo

$$\frac{1}{\sqrt{1}} = 1 = \sqrt{1}.$$

Zato trditev $P(1)$ velja.

3. korak: Zapišemo indukcijsko predpostavko.

Naj bo $k \geq 1$ naravno število. Predpostavimo, da trditev $P(k)$ velja:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{k}.$$

Zdaj bomo dokazali, da velja tudi trditev $P(k+1)$.

4. korak: Dokažemo naslednji primer.

Vsoti prvih k členov prištejemo naslednji člen. Po indukcijski predpostavki velja

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Pokazati moramo, da je desna stran vsaj $\sqrt{k+1}$. Ker je $k \geq 1$, velja

$$\sqrt{k} \geq \frac{k}{\sqrt{k+1}}.$$

Res, obe strani sta nenegativni, njuni kvadrati pa zadoščajo neenakosti

$$k \geq \frac{k^2}{k+1},$$

ki je resnična, saj je enakovredna neenakosti $k(k+1) \geq k^2$. Zato

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{k}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1}.$$

Torej velja $P(k+1)$.

Zaključek.

Trditev velja za $n = 1$, poleg tega pa iz njene veljavnosti za $n = k$ sledi njena veljavnost za $n = k + 1$. Po načelu matematične indukcije zato velja

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

za vsako naravno število $n \geq 1$. □

Dokažite z matematično indukcijo, da za vsako realno število $x \geq -1$ in vsako naravno število $n \geq 1$ velja Bernoullijeva neenakost

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Rešitev

Dokaz bomo izvedli z matematično indukcijo po številu n. Število x je pri tem poljubno, vendar ves čas fiksno realno število, za katero velja $x \geq -1$.

1. korak: Zapišemo trditev.

Označimo z $P(n)$ trditev

$$P(n): \qquad (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

2. korak: Preverimo začetni primer.

Za $n = 1$ dobimo

$$(1 + x)^1 = 1 + x.$$

Torej velja

$$(1 + x)^1 = 1 + 1 \cdot x,$$

zato trditev $P(1)$ velja.

3. korak: Zapišemo indukcijsko predpostavko.

Naj bo $k \geq 1$ naravno število. Predpostavimo, da trditev $P(k)$ velja:

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx.$$

Zdaj bomo dokazali, da velja tudi trditev $P(k + 1)$.

4. korak: Dokažemo naslednji primer.

Ker je $x \geq -1$, velja $1 + x \geq 0$. Zato lahko obe strani indukcijske predpostavke pomnožimo z $1 + x$, ne

da bi se smer neenakosti spremenila:

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x).$$

Desno stran razširimo:

$$(1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2.$$

Ker sta $k \geq 1$ in $x^2 \geq 0$, velja $kx^2 \geq 0$. Zato

$$1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x.$$

Skupaj dobimo

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x.$$

Torej velja $P(k+1)$.

Zaključek.

Trditev velja za $n=1$, poleg tega pa iz njene veljavnosti za $n=k$ sledi njena veljavnost za $n=k+1$. Po načelu matematične indukcije zato za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Ker je bil $x \geq -1$ poljuben, neenakost velja za vsako realno število $x \geq -1$. □

Spomnimo se. Za naravno število $n \geq 1$ je fakulteta števila n definirana kot

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Po dogovoru velja $0! = 1$. Za vsako celo število $n \geq 0$ velja tudi rekurzivna zveza

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!.$$

Dokažite, da za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Rešitev

Najprej izpeljimo pomožno oceno, ki jo bomo potrebovali v indukcijskem koraku. Nato bomo glavno neenakost dokazali z matematično indukcijo.

Pomožna ocena.

Naj bo $k \geq 1$. Po Bernoullijevi neenakosti velja

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \geq 1 + k \cdot \frac{1}{k} = 2.$$

Ker je $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$ in je $k^k > 0$, obe strani pomnožimo s k^k. Dobimo

$$(k+1)^k \geq 2k^k.$$

To oceno bomo uporabili v indukcijskem koraku.

1. korak: Zapišemo trditev.

Označimo z $P(n)$ trditev

$$P(n): \qquad n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

2. korak: Preverimo začetni primer.

Za $n = 1$ je

$$1! = 1 \qquad \text{in} \qquad 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1.$$

Zato trditev $P(1)$ velja.

3. korak: Zapišemo indukcijsko predpostavko.

Naj bo $k \geq 1$ naravno število. Predpostavimo, da trditev $P(k)$ velja:

$$k! \leq 2\left(\frac{k}{2}\right)^k.$$

Pokazati moramo, da velja tudi trditev $P(k+1)$, torej

$$(k+1)! \leq 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

4. korak: Dokažemo naslednji primer.

Uporabimo zvezo $(k+1)! = (k+1)k!$ in nato indukcijsko predpostavko:

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1)k! \\ &\leq 2(k+1)\left(\frac{k}{2}\right)^k \\ &= \frac{2(k+1)k^k}{2^k}.\end{aligned}$$

Po pomožni oceni velja $2k^k \leq (k+1)^k$. Ker je $\frac{k+1}{2^k} > 0$, smemo obe strani te neenakosti pomnožiti z

$\frac{k+1}{2^k}$. Zato

$$\frac{2(k+1)k^k}{2^k} \leq \frac{(k+1)^{k+1}}{2^k} = 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

Torej velja

$$(k+1)! \leq 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1},$$

kar pomeni, da velja $P(k+1)$.

Zaključek.

Trditev velja za $n = 1$, poleg tega pa iz njene veljavnosti za $n = k$ sledi njena veljavnost za $n = k+1$. Po načelu matematične indukcije zato za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

□

Dokažite z matematično indukcijo, da za vsak $a \in [0,1]$ in vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$(1+a)^n \leq 1 + (2^n - 1)a.$$

Rešitev

Naj bo $a \in [0,1]$ poljubno, vendar fiksno število.

1. korak: Zapišemo trditev.

Označimo z $P(n)$ trditev

$$P(n): \qquad (1+a)^n \leq 1 + (2^n - 1)a.$$

2. korak: Preverimo začetni primer.

Za $n = 1$ dobimo

$$(1+a)^1 = 1 + a = 1 + (2^1 - 1)a.$$

Torej velja $P(1)$.

3. korak: Zapišemo indukcijsko predpostavko.

Naj bo $k \geq 1$ naravno število. Predpostavimo, da trditev $P(k)$ velja, torej da je

$$(1+a)^k \leq 1 + (2^k - 1)a.$$

Dokazati moramo, da velja tudi

$$(1+a)^{k+1} \leq 1 + (2^{k+1} - 1)a.$$

4. korak: Dokažemo naslednji primer.

Ker je $a \geq 0$, velja $1 + a > 0$. Zato lahko indukcijsko predpostavko pomnožimo z $1 + a$:

$$\begin{aligned}(1+a)^{k+1} &\leq \Big(1 + (2^k - 1)a\Big)(1+a) \\ &= 1 + 2^k a + (2^k - 1)a^2.\end{aligned}$$

Ker je $0 \leq a \leq 1$, velja $a^2 \leq a$. Zato

$$\begin{aligned}(1+a)^{k+1} &\leq 1 + 2^k a + (2^k - 1)a \\ &= 1 + (2^{k+1} - 1)a.\end{aligned}$$

Torej iz $P(k)$ sledi $P(k+1)$.

Zaključek.

Trditev velja za $n = 1$, poleg tega pa iz njene veljavnosti za $n = k$ sledi njena veljavnost za $n = k + 1$. Po načelu matematične indukcije zato za vsako naravno število $n \geq 1$ in vsak $a \in [0, 1]$ velja

$$(1+a)^n \leq 1 + (2^n - 1)a.$$

□

Dokažite z matematično indukcijo, da za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$\underbrace{\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \ldots + \sqrt{20}}}}}_{n \text{ korenov}} < 5.$$

Rešitev

Označimo z a_n izraz z n koreni, torej

$$a_n = \underbrace{\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \ldots + \sqrt{20}}}}}_{n \text{ korenov}}.$$

1. korak: Zapišemo trditev.

Označimo z $P(n)$ trditev

$$P(n): \qquad a_n < 5.$$

2. korak: Preverimo začetni primer.

Za $n = 1$ je

$$a_1 = \sqrt{20} < \sqrt{25} = 5.$$

Zato trditev $P(1)$ velja.

3. korak: Zapišemo indukcijsko predpostavko.

Naj bo $k \geq 1$ naravno število. Predpostavimo, da trditev $P(k)$ velja, torej da je $a_k < 5$. Dokazati moramo, da je $a_{k+1} < 5$.

4. korak: Dokažemo naslednji primer.

Po definiciji velja

$$a_{k+1} = \sqrt{20 + a_k}.$$

Po indukcijski predpostavki je $a_k < 5$, zato je

$$20 + a_k < 25.$$

Ker sta obe strani nenegativni, lahko vzamemo kvadratni koren:

$$a_{k+1} = \sqrt{20 + a_k} < \sqrt{25} = 5.$$

Torej iz $P(k)$ sledi $P(k+1)$.

Zaključek.

Trditev velja za $n = 1$, poleg tega pa iz njene veljavnosti za $n = k$ sledi njena veljavnost za $n = k + 1$. Po načelu matematične indukcije zato za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$\underbrace{\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \ldots + \sqrt{20}}}}}_{n \text{ korenov}} < 5.$$

□

Deljivost v množici celih števil

Naj bosta $a, b \in \mathbb{Z}$ in naj bo $a \neq 0$. Pravimo, da a deli b, če obstaja $q \in \mathbb{Z}$, za katero velja $b = aq$. To zapišemo $a \mid b$.

Dokažite z matematično indukcijo, da za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$6 \mid (n^3 - n).$$

Rešitev

Zapis $6 \mid (n^3 - n)$ pomeni, da je $n^3 - n$ deljiv s 6.

1. korak: Zapišemo trditev.

Označimo z $P(n)$ trditev

$$P(n): \qquad 6 \mid (n^3 - n).$$

2. korak: Preverimo začetni primer.

Za $n = 1$ dobimo

$$1^3 - 1 = 0.$$

Ker je $0 = 6 \cdot 0$, velja $6 \mid 0$. Zato trditev $P(1)$ velja.

3. korak: Zapišemo indukcijsko predpostavko.

Naj bo $k \geq 1$ naravno število. Predpostavimo, da trditev $P(k)$ velja, torej da je $k^3 - k$ deljiv s 6. Dokazati moramo, da je s 6 deljivo tudi število $(k+1)^3 - (k+1)$.

4. korak: Dokažemo naslednji primer.

Izraz preoblikujemo tako, da se pojavi del, ki je deljiv s 6 po indukcijski predpostavki:

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\ &= (k^3 - k) + 3k(k+1).\end{aligned}$$

Po indukcijski predpostavki je $k^3 - k$ deljiv s 6. Poleg tega sta števili k in $k+1$ zaporedni, zato je eno od njiju sodo. Torej je produkt $k(k+1)$ sod, zato je $3k(k+1)$ deljiv s 6.

Vsota dveh števil, ki sta deljivi s 6, je prav tako deljiva s 6. Zato velja

$$6 \mid \Big((k+1)^3 - (k+1)\Big).$$

S tem smo dokazali, da iz $P(k)$ sledi $P(k+1)$.

Zaključek.

Trditev velja za $n = 1$, poleg tega pa iz njene veljavnosti za $n = k$ sledi njena veljavnost za $n = k + 1$. Po načelu matematične indukcije zato za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$6 \mid (n^3 - n).$$

□

Dokažite z matematično indukcijo, da za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$6 \mid (7n^3 - n).$$

Rešitev

Zapis $6 \mid (7n^3 - n)$ pomeni, da je $7n^3 - n$ deljiv s 6.

1. korak: Zapišemo trditev.

Označimo z $P(n)$ trditev

$$P(n): \qquad 6 \mid (7n^3 - n).$$

2. korak: Preverimo začetni primer.

Za $n = 1$ dobimo

$$7 \cdot 1^3 - 1 = 6.$$

Ker je $6 = 6 \cdot 1$, velja $6 \mid 6$. Zato trditev $P(1)$ velja.

3. korak: Zapišemo indukcijsko predpostavko.

Naj bo $k \geq 1$ naravno število. Predpostavimo, da trditev $P(k)$ velja, torej da je $7k^3 - k$ deljiv s 6. Dokazati moramo, da je s 6 deljivo tudi število $7(k+1)^3 - (k+1)$.

4. korak: Dokažemo naslednji primer.

Izraz preoblikujemo tako, da se pojavi del, ki je deljiv s 6 po indukcijski predpostavki:

$$\begin{aligned} 7(k+1)^3 - (k+1) &= 7(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k - 1 \\ &= (7k^3 - k) + 21k^2 + 21k + 6 \\ &= (7k^3 - k) + 21k(k+1) + 6. \end{aligned}$$

Po indukcijski predpostavki je $7k^3 - k$ deljiv s 6. Poleg tega sta števili k in $k+1$ zaporedni, zato je eno od njiju sodo. Torej je $k(k+1)$ sodo število, zato je $21k(k+1)$ deljiv s 6. Tudi 6 je deljiv s 6.

Vsota števil, ki so deljiva s 6, je prav tako deljiva s 6. Zato velja

$$6 \mid \Big(7(k+1)^3 - (k+1)\Big).$$

S tem smo dokazali, da iz $P(k)$ sledi $P(k+1)$.

Zaključek.

Trditev velja za $n = 1$, poleg tega pa iz njene veljavnosti za $n = k$ sledi njena veljavnost za $n = k + 1$.

Po načelu matematične indukcije zato za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$6 \mid (7n^3 - n).$$

□

Dokažite z matematično indukcijo, da za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$133 \mid \left(11^{n+1} + 12^{2n-1}\right).$$

Rešitev

Zapis $133 \mid (11^{n+1} + 12^{2n-1})$ pomeni, da je $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ deljiv s 133.

1. korak: Zapišemo trditev.

Označimo z $P(n)$ trditev

$$P(n): \qquad 133 \mid \left(11^{n+1} + 12^{2n-1}\right).$$

2. korak: Preverimo začetni primer.

Za $n = 1$ dobimo

$$11^{1+1} + 12^{2\cdot 1-1} = 11^2 + 12 = 121 + 12 = 133.$$

Ker je $133 = 133 \cdot 1$, velja $133 \mid 133$. Zato trditev $P(1)$ velja.

3. korak: Zapišemo indukcijsko predpostavko.

Naj bo $k \geq 1$ naravno število. Predpostavimo, da trditev $P(k)$ velja, torej da je

$$11^{k+1} + 12^{2k-1}$$

deljivo s 133. Dokazati moramo, da je s 133 deljivo tudi število

$$11^{k+2} + 12^{2k+1}.$$

4. korak: Dokažemo naslednji primer.

Uporabimo enakost

$$12^2 = 144 = 11 + 133.$$

Tedaj velja

$$\begin{aligned} 11^{k+2} + 12^{2k+1} &= 11 \cdot 11^{k+1} + 12^2 \cdot 12^{2k-1} \\ &= 11 \cdot 11^{k+1} + (11 + 133) \cdot 12^{2k-1} \\ &= 11\left(11^{k+1} + 12^{2k-1}\right) + 133 \cdot 12^{2k-1}. \end{aligned}$$

Po indukcijski predpostavki je izraz $11^{k+1} + 12^{2k-1}$ deljiv s 133. Zato je tudi $11\left(11^{k+1} + 12^{2k-1}\right)$ deljiv s 133. Tudi $133 \cdot 12^{2k-1}$ je deljiv s 133.

Vsota teh dveh števil je deljiva s 133. Torej velja

$$133 \mid \left(11^{k+2} + 12^{2k+1}\right).$$

S tem smo dokazali, da iz $P(k)$ sledi $P(k+1)$.

Zaključek.

Trditev velja za $n = 1$, poleg tega pa iz njene veljavnosti za $n = k$ sledi njena veljavnost za $n = k + 1$. Po načelu matematične indukcije zato za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$133 \mid \left(11^{n+1} + 12^{2n-1}\right).$$

□

Dokažite z matematično indukcijo, da za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$7 \mid \left(1 + 2^{3n+1} + 2^{6n+2}\right).$$

Rešitev

Zapis $7 \mid (1 + 2^{3n+1} + 2^{6n+2})$ pomeni, da je $1 + 2^{3n+1} + 2^{6n+2}$ deljivo s 7.

1. korak: Zapišemo trditev.

Označimo z $P(n)$ trditev

$$P(n): \qquad 7 \mid \left(1 + 2^{3n+1} + 2^{6n+2}\right).$$

2. korak: Preverimo začetni primer.

Za $n = 1$ dobimo

$$1 + 2^{3\cdot 1+1} + 2^{6\cdot 1+2} = 1 + 2^4 + 2^8 = 1 + 16 + 256 = 273.$$

Ker je $273 = 7 \cdot 39$, velja $7 \mid 273$. Zato trditev $P(1)$ velja.

3. korak: Zapišemo indukcijsko predpostavko.

Naj bo $k \geq 1$ naravno število. Predpostavimo, da trditev $P(k)$ velja, torej da je

$$1 + 2^{3k+1} + 2^{6k+2}$$

deljivo s 7. Dokazati moramo, da je s 7 deljivo tudi število

$$1 + 2^{3(k+1)+1} + 2^{6(k+1)+2}.$$

4. korak: Dokažemo naslednji primer.

Ker se pri prehodu od k do $k+1$ prvi eksponent poveča za 3, drugi pa za 6, velja

$$\begin{aligned} 1 + 2^{3(k+1)+1} + 2^{6(k+1)+2} &= 1 + 2^{3k+4} + 2^{6k+8} \\ &= 1 + 8 \cdot 2^{3k+1} + 64 \cdot 2^{6k+2} \\ &= \left(1 + 2^{3k+1} + 2^{6k+2}\right) + 7 \cdot 2^{3k+1} + 63 \cdot 2^{6k+2}. \end{aligned}$$

Po indukcijski predpostavki je prvi oklepaj deljiv s 7. Tudi $7 \cdot 2^{3k+1}$ in $63 \cdot 2^{6k+2}$ sta deljiva s 7, saj je $63 = 7 \cdot 9$.

Zato je njihova vsota deljiva s 7. Torej velja

$$7 \mid \left(1 + 2^{3(k+1)+1} + 2^{6(k+1)+2}\right).$$

S tem smo dokazali, da iz $P(k)$ sledi $P(k+1)$.

Zaključek.

Trditev velja za $n = 1$, poleg tega pa iz njene veljavnosti za $n = k$ sledi njena veljavnost za $n = k + 1$. Po načelu matematične indukcije zato za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$7 \mid \left(1 + 2^{3n+1} + 2^{6n+2}\right).$$

□

Število območij, ki jih določijo premice

Dokažite, da n paroma nevzporednih premic v ravnini, od katerih se nobene tri ne sekajo v isti točki, razdeli ravnino na

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1$$

delov.

Rešitev

Dokazujemo z matematično indukcijo po n.

Naj bo $P(n)$ trditev, da n paroma nevzporednih premic v ravnini, od katerih se nobene tri ne sekajo v

isti točki, razdeli ravnino na

$$\frac{n(n+1)}{2}+1$$

območij.

Začetni korak. Za $n = 1$ ena premica razdeli ravnino na natanko dve območji. Poleg tega velja

$$\frac{1(1+1)}{2}+1 = 1+1 = 2.$$

Torej trditev $P(1)$ velja.

Indukcijski korak. Predpostavimo, da za neko naravno število k velja trditev $P(k)$. To pomeni, da k paroma nevzporednih premic, od katerih se nobene tri ne sekajo v isti točki, razdeli ravnino na

$$\frac{k(k+1)}{2}+1$$

območij.

Naj bodo dane premice $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$. Dodajmo novo premico ℓ_{k+1}. Ker so premice paroma nevzporedne, se ℓ_{k+1} za vsak $i \in \{1, \ldots, k\}$ seka s premico ℓ_i v natanko eni točki. Označimo jo s

$$P_i = \ell_{k+1} \cap \ell_i.$$

Točke $P_1, \ldots, P_k$ so med seboj različne. Če bi namreč za različna indeksa i in j veljalo $P_i = P_j$, bi se premice

$$\ell_{k+1}, \qquad \ell_i, \qquad \ell_j$$

sekale v isti točki. To bi bilo v nasprotju s predpostavko, da se nobene tri premice ne sekajo v isti točki. Zato se nova premica ℓ_{k+1} s prejšnjimi k premicami seka v natanko k različnih točkah.

Točke $P_1, \ldots, P_k$ uredimo glede na njihov vrstni red na premici ℓ_{k+1}. Te točke razdelijo premico ℓ_{k+1} na natanko $k+1$ delov: na dva poltraka in na $k-1$ odprtih daljic med zaporednima presečiščema.

Noben izmed teh $k+1$ delov ne seka nobene od premic $\ell_1, \ldots, \ell_k$. Vsako presečišče nove premice s katero koli od prejšnjih premic je namreč ena od točk $P_1, \ldots, P_k$, te točke pa so krajišča obravnavanih delov. Zato je vsak tak del nove premice v celoti vsebovan v enem območju, ki ga določajo prve k premice.

Po dodajanju premice ℓ_{k+1} vsak izmed teh delov razdeli območje, v katerem leži, na dve območji: eno na eni in drugo na drugi strani premice ℓ_{k+1}. Zato vsak del poveča število območij za natanko ena. Ker je takih delov $k+1$, dodana premica ustvari natanko $k+1$ novih območij.

Skupno število območij, ki jih določajo premice $\ell_1, \ldots, \ell_k, \ell_{k+1}$, je zato

$$\left(\frac{k(k+1)}{2} + 1\right) + (k+1).$$

Izraz poenostavimo:

$$\begin{aligned}\left(\frac{k(k+1)}{2} + 1\right) + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} + 1 \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1.\end{aligned}$$

Ker je

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1 = \frac{(k+1)\Big((k+1)+1\Big)}{2} + 1,$$

sledi, da velja $P(k+1)$.

Ker velja začetni korak $P(1)$ in ker iz veljavnosti $P(k)$ sledi veljavnost $P(k+1)$ za vsako naravno število k, po načelu matematične indukcije sledi, da n paroma nevzporednih premic v ravnini, od katerih se nobene tri ne sekajo v isti točki, razdeli ravnino na

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1$$

območij. □

Analiza I

Povzetek 2. vaj

Realna števila, koreni ter racionalna in iracionalna števila

1. Realna števila

Množico realnih števil označimo z $\mathbb{R}$. V njej so racionalna in iracionalna števila:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

Realna števila lahko seštevamo, odštevamo in množimo. Delimo lahko, kadar delitelj ni enak nič. Za realna števila veljajo običajne računske lastnosti:

- **Komutativnost:** $a + b = b + a$ in $ab = ba$.
- **Asociativnost:** $(a + b) + c = a + (b + c)$ in $(ab)c = a(bc)$.
- **Distributivnost:** $a(b + c) = ab + ac$.

Če neenakost množimo ali delimo z negativnim številom, se njena smer obrne.

2. Racionalna in iracionalna števila

Število je **racionalno**, če ga lahko zapišemo kot ulomek dveh celih števil:

$$x = \frac{p}{q}, \qquad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq 0.$$

Množico racionalnih števil označimo z $\mathbb{Q}$. Primeri racionalnih števil so

$$\frac{3}{5}, \qquad -2 = \frac{-2}{1}, \qquad 0{,}75 = \frac{3}{4}.$$

Racionalno število ima končen decimalni zapis ali pa se njegov decimalni zapis periodično ponavlja.

Število je **iracionalno**, če ga ne moremo zapisati kot ulomek dveh celih števil. Njegov decimalni zapis je neskončen in se ne ponavlja periodično. Primeri iracionalnih števil so

$$\sqrt{2}, \qquad \sqrt{3}, \qquad \pi.$$

Veljajo naslednje lastnosti:

- Vsota racionalnega in iracionalnega števila je iracionalna.
- Produkt neničelnega racionalnega in iracionalnega števila je iracionalen.
- Vsota ali produkt dveh iracionalnih števil je lahko racionalen ali iracionalen.

Na primer,

$$\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) = 2, \qquad \sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}.$$

3. Kvadratni koren

Za $a \geq 0$ je $\sqrt{a}$ **nenegativno** število, katerega kvadrat je a:

$$\sqrt{a} = b \quad \Longleftrightarrow \quad b \geq 0 \text{ in } b^2 = a.$$

Tako je na primer $\sqrt{25} = 5$, saj je $5^2 = 25$. Čeprav velja tudi $(-5)^2 = 25$, je dogovor, da je $\sqrt{25} = 5$.

Pomembno je, da kvadriranje in korenjenje ne odpravita vedno drug drugega. Kvadratni koren je po dogovoru vedno nenegativen, zato za vsako realno število a velja

$$\sqrt{a^2} = |a|,$$

ne pa nujno $\sqrt{a^2} = a$.

Na primer, za $a = -4$ dobimo

$$\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|.$$

Torej ne smemo zapisati $\sqrt{(-4)^2} = -4$; to bi pomenilo $4 = -4$, kar ni res.

V množici realnih števil kvadratni koren negativnega števila ni definiran.

4. Lastnosti korenov

Če sta $a \geq 0$ in $b \geq 0$, velja

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

Če sta $a \geq 0$ in $b > 0$, velja

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Koren lahko zapišemo tudi kot potenco:

$$\sqrt{a} = a^{1/2} \qquad (a \geq 0).$$

Korena vsote praviloma ne moremo razdeliti:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Na primer,

$$\sqrt{9+16} = 5, \qquad \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7.$$

5. Kdaj je koren racionalen?

Za pozitivno racionalno število q velja

$$\sqrt{q} \in \mathbb{Q} \quad \Longleftrightarrow \quad q = r^2 \text{ za neko } r \in \mathbb{Q}.$$

Na primer, $\sqrt{4} = 2$ je racionalno število, medtem ko je $\sqrt{2}$ iracionalno.

Če je $n \in \mathbb{N}$, je $\sqrt{n}$ bodisi naravno bodisi iracionalno število. Na primer, $\sqrt{9} = 3$, medtem ko je $\sqrt{5}$ iracionalno.

6. Zgornja in spodnja meja, infimum, supremum, minimum in maksimum

Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazna množica.

- Število $M \in \mathbb{R}$ je **zgornja meja** množice A, če za vsak $x \in A$ velja

$$x \leq M.$$

- Število $m \in \mathbb{R}$ je **spodnja meja** množice A, če za vsak $x \in A$ velja

$$m \leq x.$$

- **Supremum** množice A, označen z $\sup A$, je njena najmanjša zgornja meja.
- **Infimum** množice A, označen z $\inf A$, je njena največja spodnja meja.
- Število M je **maksimum** množice A, če je $M \in A$ in je hkrati zgornja meja množice A.
- Število m je **minimum** množice A, če je $m \in A$ in je hkrati spodnja meja množice A.

Supremum in infimum nista nujno elementa množice. Maksimum in minimum pa morata biti elementa množice. Zato velja:

$$\sup A \in A \implies \max A = \sup A, \qquad \inf A \in A \implies \min A = \inf A.$$

Primer. Naj bo $A = (0, 1)$. Števili 0 in 1 nista elementa množice A, vendar sta njeni meji:

$$\inf A = 0, \qquad \sup A = 1.$$

Ker $0 \notin A$ in $1 \notin A$, množica A nima minimuma in maksimuma.

Nasprotno, za množico $B = [0, 1]$ velja

$$\min B = \inf B = 0, \qquad \max B = \sup B = 1,$$

saj sta števili 0 in 1 elementa množice B.

7. Dokazovanje s protislovjem

Želimo dokazati, da velja implikacija $P \Rightarrow Q$. Negacija te implikacije je enakovredna izjavi

$$\neg(P \Rightarrow Q) \iff P \wedge \neg Q.$$

Zato pri dokazu s protislovjem predpostavimo, da je P resnična, Q pa neresnična. Če iz te predpostavke izpeljemo protislovje, ugotovimo, da predpostavka $P \wedge \neg Q$ ne more biti resnična. Torej velja $P \Rightarrow Q$.

Recept.

(a) Predpostavimo nasprotno: P velja, Q pa ne velja.

(b) Iz predpostavke $P \wedge \neg Q$ in znanih dejstev izpeljemo protislovje.

(c) Sklenemo, da predpostavka $P \wedge \neg Q$ ni pravilna.

(d) Zato velja $P \Rightarrow Q$.

Shematično:

Predpostavimo: $P \wedge \neg Q$.
Izpeljemo protislovje.
Zato $P \wedge \neg Q$ ne velja, torej $P \Rightarrow Q$.

Določi supremum, infimum, minimum in maksimum dane množice, če obstajajo:

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rešitev

Predpostavimo, da je $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2.$$

Zato je 1 spodnja meja, 2 pa zgornja meja množice A.

Infimum. Pokažimo, da je 1 največja spodnja meja množice A. Naj bo $c > 1$. Ker so naravna števila neomejena, lahko izberemo $n \in \mathbb{N}$ tako, da velja

$$n > \frac{1}{c-1}.$$

Tedaj je

$$\frac{1}{n} < c - 1,$$

zato

$$1 + \frac{1}{n} < c.$$

Ker je $1 + \frac{1}{n} \in A$, število c ni spodnja meja množice A. Tako nobeno število, večje od 1, ni spodnja meja. Torej je $\inf A = 1$.

Množica A nima minimuma, saj je za vsak $n \in \mathbb{N}$

$$1 < 1 + \frac{1}{n}.$$

Število 1 torej ne pripada množici A.

Supremum in maksimum. Za $n = 1$ dobimo

$$1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Ker je 2 zgornja meja množice A in hkrati njen element, je

$$\sup A = 2 \qquad \text{in} \qquad \max A = 2.$$

$\inf A = 1$,	$\min A$ ne obstaja,	$\sup A = 2$,	$\max A = 2$.

□

Določi supremum, infimum, minimum in maksimum dane množice, če obstajajo:

$$B = \{x^2 - 6x \mid x > 0\}.$$

Rešitev

Naj bo $B = \{x^2 - 6x \mid x > 0\}$. Izraz preoblikujemo: $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$. Ker je $(x-3)^2 \geq 0$, za vsak $x > 0$ velja $x^2 - 6x \geq -9$. Enakost velja pri $x = 3$, zato je -9 najmanjši element množice B.

Infimum in minimum. Število -9 je spodnja meja množice B in je tudi njen element, saj

$$3^2 - 6 \cdot 3 = -9.$$

Zato je $\inf B = -9$ and $\min B = -9$.

Supremum in maksimum. Množica B nima zgornje meje. Formalno moramo pokazati: za vsako realno število M obstaja število $b \in B$, za katero velja $b > M$.

Naj bo torej $M \in \mathbb{R}$ poljubno. Izberimo $x = |M| + 7$. Potem je $x > 0$, zato je $b = x^2 - 6x$ element množice B. Izračunamo:

$$\begin{aligned} b &= (|M| + 7)^2 - 6(|M| + 7) \\ &= |M|^2 + 14|M| + 49 - 6|M| - 42 \\ &= M^2 + 8|M| + 7. \end{aligned}$$

Če je $M \geq 0$, potem je

$$b - M = M^2 + 8M + 7 - M = M^2 + 7M + 7 > 0.$$

Zato je $b > M$.

Če pa je $M < 0$, je

$$b = M^2 + 8|M| + 7 > 0 > M.$$

Tudi v tem primeru velja $b > M$.

Torej za vsako realno število M obstaja $b \in B$, za katero velja $b > M$. Zato množica B ni omejena navzgor. Zato množica B nima supremuma v $\mathbb{R}$ in nima maksimuma.

$$\boxed{\inf B = \min B = -9, \qquad \sup B \text{ ne obstaja}, \qquad \max B \text{ ne obstaja}.}$$

□

Določi supremum, infimum, minimum in maksimum dane množice, če obstajajo:

$$C = \{x \in [1,3] \mid x \text{ ima v decimalnem zapisu vsaj dve števki } 3\}.$$

Rešitev

Naj bo $C = \{x \in [1,3] \mid x \text{ ima v decimalnem zapisu vsaj dve trojki}\}$.

Števili 1 in 3 ne pripadata množici C, saj sta njuna decimalna zapisa

$$1 = 1{,}000\ldots \qquad \text{in} \qquad 3 = 3{,}000\ldots.$$

Zato za vsak $x \in C$ velja

$$1 < x < 3.$$

Torej je 1 spodnja meja, 3 pa zgornja meja množice C.

Infimum. Za vsako naravno število n definiramo

$$x_n = 1 + \frac{3}{10^n} + \frac{3}{10^{n+1}} = 1 + \frac{33}{10^{n+1}}.$$

Na primer,

$$x_1 = 1{,}33, \qquad x_2 = 1{,}033, \qquad x_3 = 1{,}0033.$$

Vsako število x_n ima v decimalnem zapisu vsaj dve trojki, zato je $x_n \in C$.

Pokažimo, da je 1 največja spodnja meja množice C. Naj bo $c > 1$. Ker so potence števila 10 neomejene, lahko izberemo $N \in \mathbb{N}$, da velja

$$10^{N+1} > \frac{33}{c-1}.$$

Zato

$$\frac{33}{10^{N+1}} < c - 1,$$

in posledično

$$x_N = 1 + \frac{33}{10^{N+1}} < c.$$

Ker je $x_N \in C$, število c ni spodnja meja množice C. Tako nobeno število, večje od 1, ni spodnja meja. Ker je 1 spodnja meja, dobimo

$$\inf C = 1.$$

Množica C nima minimuma. Res, naj bo $x \in C$. Potem je $x > 1$. Izberemo $n \in \mathbb{N}$ tako veliko, da velja

$$10^{n+1} > \frac{33}{x-1}.$$

Tedaj je

$$x_n = 1 + \frac{33}{10^{n+1}} < x.$$

Ker je $x_n \in C$, število x ni najmanjši element množice C. To velja za vsak $x \in C$, zato minimum ne obstaja.

Supremum. Za vsako naravno število n definiramo

$$y_n = 3 - \frac{2}{3 \cdot 10^n}.$$

Na primer,

$$y_1 = 2{,}9333\ldots, \qquad y_2 = 2{,}9933\ldots, \qquad y_3 = 2{,}99933\ldots.$$

Vsako število y_n ima v decimalnem zapisu vsaj dve trojki, zato je $y_n \in C$.

Pokažimo, da je 3 najmanjša zgornja meja množice C. Naj bo $c < 3$. Ker so potence števila 10 neomejene, lahko izberemo $N \in \mathbb{N}$, da velja

$$10^N > \frac{2}{3(3-c)}.$$

Zato

$$\frac{2}{3 \cdot 10^N} < 3 - c,$$

in posledično

$$y_N = 3 - \frac{2}{3 \cdot 10^N} > c.$$

Ker je $y_N \in C$, število c ni zgornja meja množice C. Tako nobeno število, manjše od 3, ni zgornja meja. Ker je 3 zgornja meja, dobimo

$$\sup C = 3.$$

Množica C nima maksimuma. Res, naj bo $x \in C$. Potem je $x < 3$. Izberemo $n \in \mathbb{N}$ tako veliko, da velja

$$10^n > \frac{2}{3(3-x)}.$$

Tedaj je

$$y_n = 3 - \frac{2}{3 \cdot 10^n} > x.$$

Ker je $y_n \in C$, število x ni največji element množice C. To velja za vsak $x \in C$, zato maksimum ne obstaja.

$$\boxed{\inf C = 1, \qquad \sup C = 3, \qquad \min C \text{ ne obstaja}, \qquad \max C \text{ ne obstaja}.}$$

□

Naj bo n naravno število. Dokaži, da je število $\sqrt{n}$ bodisi naravno, bodisi iracionalno.

Rešitev

Če je $\sqrt{n}$ iracionalno število, je trditev že dokazana. Predpostavimo zato, da je $\sqrt{n}$ racionalno. Potem ga lahko zapišemo v obliki

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q},$$

kjer sta $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, ulomek $\frac{p}{q}$ pa je okrajšan.

Kvadriramo obe strani:

$$n = \frac{p^2}{q^2}, \qquad \text{zato} \qquad nq^2 = p^2.$$

Pokazati moramo, da je $q = 1$. Predpostavimo nasprotno, da je $q > 1$. Potem ima q praštevilski delitelj r. Ker $r \mid q$, velja tudi $r \mid q^2$. Iz enačbe $nq^2 = p^2$ sledi, da $r \mid p^2$. Ker je r praštevilo, iz tega sledi $r \mid p$.

Tako praštevilo r deli tako p kot q, kar je v protislovju s tem, da je ulomek $\frac{p}{q}$ okrajšan. Zato mora biti $q = 1$.

Torej je

$$\sqrt{n} = \frac{p}{1} = p \in \mathbb{N}.$$

Dokazali smo, da je $\sqrt{n}$ bodisi naravno bodisi iracionalno število. □

Primer. Dokažimo, da je $\sqrt{39}$ iracionalno število.

Po že dokazani trditvi je število $\sqrt{39}$ bodisi naravno bodisi iracionalno. Pokažimo, da ni naravno.

Ker velja $6^2 = 36 < 39 < 49 = 7^2$, število 39 ni kvadrat naravnega števila. Zato $\sqrt{39}$ ni naravno število.

Po trditvi torej preostane le še druga možnost:

$\boxed{\sqrt{39} \text{ je iracionalno število.}}$

Naj bo q neničelno racionalno število, $x > 0$ in y pa iracionalni števili.

(a) Dokaži, da so števila $\sqrt{x}$, $q + x$ in qx iracionalna.

(b) Ali lahko kaj podobnega povemo o številih $x + y$, xy in $\sqrt{q}$?

Rešitev

(a) Dokažimo, da so $\sqrt{x}$, $q + x$ in qx iracionalna števila.

Ker je $x > 0$, je $\sqrt{x}$ definirano. Predpostavimo, da je $\sqrt{x}$ racionalno. Potem je tudi

$$x = (\sqrt{x})^2$$

racionalno, kar je protislovje, saj je x iracionalno. Torej je $\sqrt{x}$ iracionalno.

Predpostavimo, da je $q + x$ racionalno. Ker je q racionalno, bi bilo tudi

$$(q + x) - q = x$$

racionalno. To je protislovje, zato je $q + x$ iracionalno.

Nazadnje predpostavimo, da je qx racionalno. Ker je $q \neq 0$, je tudi $\frac{1}{q}$ racionalno, zato bi bilo

$$\frac{1}{q} \cdot (qx) = x$$

racionalno. To je protislovje, zato je tudi qx iracionalno.

(b) Za števili $x + y$ in xy tega ne moremo trditi vedno: lahko sta racionalni ali iracionalni. Na primer,

$$\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) = 2$$

je racionalno število, medtem ko je $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ iracionalno. Podobno je $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ racionalno, medtem ko je $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ iracionalno.

Pri $\sqrt{q}$ moramo predpostaviti, da je $q > 0$, da je koren definiran v množici realnih števil. Koren pozitivnega racionalnega števila je lahko racionalen, na primer $\sqrt{4} = 2$, ali iracionalen, na primer $\sqrt{2}$. Zato tudi za $\sqrt{q}$ ne moremo vedno trditi, da je iracionalen.

□

Ali obstaja tako naravno število $n \in \mathbb{N}$, da sta $\sqrt{n}$ in $\sqrt{n+2026}$ naravni števili?

Rešitev

Ne, tako naravno število ne obstaja.

Predpostavimo nasprotno, da obstaja tako naravno število n. Potem obstajata naravni števili a in b, da velja

$$n = a^2 \qquad \text{in} \qquad n + 2026 = b^2.$$

Če odštejemo prvo enačbo od druge, dobimo

$$b^2 - a^2 = 2026.$$

Uporabimo razliko kvadratov:

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a).$$

Zato velja

$$(b - a)(b + a) = 2026.$$

Števili $b - a$ in $b + a$ sta obe sodi ali obe lihi.

Poglejmo možnosti za števili a in b.

- Če sta a in b obe sodi, je njuna vsota $b + a$ soda in njuna razlika $b - a$ soda.
- Če sta a in b obe lihi, je tudi njuna vsota soda in njuna razlika soda.
- Če je eno od števil a, b sodo, drugo pa liho, je njuna vsota liha in tudi njuna razlika liha.

Torej sta $b - a$ in $b + a$ vedno iste vrste: obe sodi ali obe lihi.

Ker je 2026 sodo število, ne moreta biti obe lihi. Torej sta obe števili $b - a$ in $b + a$ sodi.

Če sta oba faktorja soda, je njun produkt deljiv s 4. Zato bi moralo biti tudi število 2026 deljivo s 4.

Ker je $2026 = 506 \cdot 4 + 2$, 2026 ni deljivo s 4. To je protislovje.

Zato ne obstaja naravno število n, za katero bi bili obe števili $\sqrt{n}$ in $\sqrt{n+2026}$ naravni.

□

Pokaži, da $\sqrt{3}+\sqrt{13}$ ni racionalno število.

Rešitev

Predpostavimo nasprotno, da je $\sqrt{3}+\sqrt{13}$ racionalno število. Potem je tudi njegov kvadrat racionalen. Izračunamo:

$$(\sqrt{3}+\sqrt{13})^2 = 3+13+2\sqrt{39} = 16+2\sqrt{39}.$$

Zato bi bilo tudi

$$\sqrt{39} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{13})^2-16}{2}$$

racionalno število. Toda $\sqrt{39}$ je iracionalno, saj $6^2 < 39 < 7^2$ in po že dokazani trditvi je kvadratni koren naravnega števila bodisi naravno bodisi iracionalno. To je protislovje.

Torej je $\sqrt{3}+\sqrt{13}$ iracionalno število. □

Dokaži, da $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{8}$ ni racionalno število.

Rešitev

Dokazujemo s protislovjem. Predpostavimo, da je število $r = \sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{8}$ racionalno. Ker so vsi členi pozitivni, velja $r > 0$. Ker je $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, lahko pišemo $r = \sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}$. Od tod dobimo

$$\sqrt{3}+\sqrt{5} = r-2\sqrt{2}.$$

Kvadriramo obe strani:

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2 = \left(r-2\sqrt{2}\right)^2.$$

Izračunamo levo in desno stran:

$$3+2\sqrt{15}+5 = r^2-4r\sqrt{2}+8.$$

Zato

$$8+2\sqrt{15} = r^2-4r\sqrt{2}+8.$$

Ko na obeh straneh odštejemo 8, dobimo

$$2\sqrt{15} = r^2-4r\sqrt{2}.$$

Delimo z 2:

$$\sqrt{15} = \frac{r^2}{2}-2r\sqrt{2}.$$

Ponovno kvadriramo obe strani. Na levi strani dobimo

$$(\sqrt{15})^2 = 15.$$

Na desni strani dobimo

$$\left(\frac{r^2}{2} - 2r\sqrt{2}\right)^2 = \frac{r^4}{4} - 2r^3\sqrt{2} + 8r^2.$$

Torej velja

$$15 = \frac{r^4}{4} - 2r^3\sqrt{2} + 8r^2.$$

Ker je $r > 0$, lahko iz te enačbe izrazimo $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = \frac{\frac{r^4}{4} + 8r^2 - 15}{2r^3}.$$

Po predpostavki je r racionalno število. Zato je tudi desna stran racionalna. Sledilo bi, da je $\sqrt{2}$ racionalno število.

Zdaj pa vemo, da to ni mogoče. Imamo

$$1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2.$$

Če vzamemo kvadratni koren, dobimo

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

Torej je $\sqrt{2}$ med naravnima številoma 1 in 2. Med njima pa ni nobenega naravnega števila. Zato $\sqrt{2}$ ni naravno število.

Prej smo dokazali naslednjo trditev: če je n naravno število, potem je $\sqrt{n}$ bodisi naravno število bodisi iracionalno število. Za $n = 2$ velja, da $\sqrt{2}$ ni naravno število. Zato mora biti iracionalno: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Tako smo dobili dve nasprotni trditvi:

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \qquad \text{in} \qquad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

To je protislovje. Zato začetna predpostavka, da je r racionalen, ne more biti pravilna.

Torej

$$\boxed{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{8} \notin \mathbb{Q}.}$$

□

Analiza I

Povzetek 3. vaj

Neenačbe

Pri reševanju neenačbe iščemo vse realne vrednosti spremenljivke, za katere je neenačba definirana in velja. Rešitev na koncu zapišemo kot interval ali unijo intervalov.

1. Določimo definicijsko območje

Preden začnemo reševati, ugotovimo, za katere vrednosti spremenljivke so vsi izrazi v neenačbi definirani.

- Če nastopa kvadratni koren, mora biti izraz pod korenom nenegativen:

$$\sqrt{f(x)} \text{ je definirana, kadar } f(x) \geq 0.$$

- Če nastopa ulomek, njegov imenovalec ne sme biti enak nič.
- Izraz z absolutno vrednostjo je definiran za vse realne vrednosti svojega argumenta.

Vse omejitve zapišemo skupaj. Njihova skupna rešitev je definicijsko območje neenačbe.

2. Pravila za preoblikovanje neenačb

Naj bo $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pri prištevanju ali odštevanju istega števila na obeh straneh se smer neenačbe ne spremeni:

$$a < b \iff a + c < b + c,$$
$$a < b \iff a - c < b - c.$$

Pri množenju ali deljenju moramo upoštevati predznak števila, s katerim množimo oziroma delimo:

$$a < b,\ c > 0 \iff ac < bc \iff \frac{a}{c} < \frac{b}{c},$$
$$a < b,\ c < 0 \iff ac > bc \iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Pri množenju ali deljenju z negativnim številom torej obrnemo smer neenačbe. Delimo lahko le z neničelnim številom.

Če množimo ali delimo z izrazom $g(x)$, moramo najprej določiti njegov predznak:

Pogoj	Smer neenačbe
$g(x) > 0$	ostane enaka
$g(x) < 0$	se obrne
$g(x) = 0$	z $g(x)$ ne smemo deliti

Če predznaka izraza $g(x)$ ne poznamo, številske premice ne smemo množiti ali deliti z njim, dokler ne določimo, kje je $g(x)$ pozitiven, negativen ali enak nič.

3. Reševanje neenačb z absolutno vrednostjo

Absolutna vrednost je definirana z

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

Zato pri neenačbah z absolutno vrednostjo določimo, kje je izraz v absolutni vrednosti pozitiven in kje negativen. Njegove ničle razdelijo številsko premico na intervale. Na vsakem intervalu absolutno vrednost odstranimo glede na predznak izraza.

Za realno število A veljajo naslednja pravila:

$$|f(x)| \leq A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -A \leq f(x) \leq A, & A \geq 0, \\ \text{neenačba nima rešitev}, & A < 0, \end{cases}$$

in

$$|f(x)| < A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -A < f(x) < A, & A > 0, \\ \text{neenačba nima rešitev}, & A \leq 0. \end{cases}$$

Prav tako velja

$$|f(x)| > A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < -A \text{ ali } f(x) > A, & A \geq 0, \\ \text{neenačba velja za vsak } x \text{ iz definicijskega območja}, & A < 0. \end{cases}$$

Poseben primer je primerjava dveh absolutnih vrednosti:

$$|f(x)| < |g(x)| \quad \Longleftrightarrow \quad f(x)^2 < g(x)^2,$$

saj sta obe absolutni vrednosti nenegativni. Dobljeno neenačbo lahko nato rešimo z razcepom:

$$f(x)^2 < g(x)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(f(x) - g(x)\Big)\Big(f(x) + g(x)\Big) < 0.$$

4. Reševanje neenačb s kvadratnim korenom

Pri kvadratnem korenu najprej določimo definicijsko območje. Pred kvadriranjem preverimo tudi predznaka obeh strani. Na primer,

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

zahteva $f(x) \geq 0$ in $g(x) > 0$. Šele nato lahko obe strani kvadriramo in dobimo

$$f(x) < g(x)^2.$$

Kvadriranje brez preverjanja predznakov lahko doda vrednosti, ki niso rešitve prvotne neenačbe.

5. Reševanje neenačb z ulomki

Pri ulomkih najprej iz definicijskega območja izločimo ničle imenovalcev. Nato lahko ulomke združimo na skupni imenovalec in določimo ničle števca ter imenovalca. Te vrednosti razdelijo številsko premico na intervale, na katerih preverimo predznak ulomka.

Vrednosti, pri katerih je imenovalec enak nič, nikoli ne spadajo med rešitve.

6. Določimo množico rešitev

Ko neenačbo rešimo, preverimo, ali dobljene vrednosti pripadajo definicijskemu območju. Nato rešitev zapišemo v intervalni obliki. Pri strogi neenačbi robne vrednosti praviloma ne vključimo; pri neenačbi z znakom $\leq$ ali $\geq$ jo vključimo, če je v definicijskem območju in neenačbo izpolnjuje.

Pri neenačbah z več absolutnimi vrednostmi je najpregledneje, da najprej določimo ničle vseh izrazov v absolutnih vrednostih. Te točke uporabimo za razdelitev številske premice, nato pa neenačbo rešimo na vsakem intervalu posebej.

$\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 > 0$

Rešitev

Najprej določimo definicijsko območje. Ker je $x^2 + 1 > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, je neenačba definirana za vse realne vrednosti: $D = \mathbb{R}$.

Neenačbo preoblikujemo:

$$\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x^2+1} > 2x - 1.$$

Leva stran je vedno pozitivna, desna pa je lahko negativna ali nenegativna. Zato obravnavamo dva primera.

1. primer: $x \leq \frac{1}{2}$.

V tem primeru je $2x - 1 \leq 0$. Ker je $\sqrt{x^2+1} > 0$, dana neenačba velja za vsak $x \leq \frac{1}{2}$.

2. primer: $x > \frac{1}{2}$.

Tedaj sta obe strani neenačbe pozitivni, zato ju lahko kvadriramo:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} > 2x - 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 + 1 > (2x-1)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 + 1 > 4x^2 - 4x + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 3x^2 - 4x < 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x(3x-4) < 0. \end{aligned}$$

Produkt je negativen med ničlama faktorjev, zato je

$$0 < x < \frac{4}{3}.$$

Upoštevamo še pogoj $x > \frac{1}{2}$ in dobimo

$$\frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}.$$

Združimo rešitvi obeh primerov:

$$x \leq \frac{1}{2} \quad \text{ali} \quad \frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}.$$

Zato je množica rešitev

$$\boxed{x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right)}.$$

□

$$\sqrt{2x+1} < \frac{x+2}{2-x}$$

Rešitev

Najprej določimo, kje je neenačba definirana. Podkorenjski izraz mora biti nenegativen, imenovalec pa ne sme biti enak nič:

$$2x+1 \geq 0 \quad \text{in} \quad 2-x \neq 0.$$

Od tod dobimo

$$x \geq -\frac{1}{2} \quad \text{in} \quad x \neq 2.$$

Torej je definicijsko območje

$$D = \left[-\frac{1}{2}, 2\right) \cup (2, \infty).$$

Ker je leva stran neenačbe nenegativna, mora biti desna stran pozitivna. Na definicijskem območju je $x+2 > 0$, zato je ulomek

$$\frac{x+2}{2-x} > 0$$

natanko tedaj, ko je $2-x > 0$, torej ko je $x < 2$. Zato neenačba nima rešitev za $x > 2$, obravnavamo pa interval

$$-\frac{1}{2} \leq x < 2.$$

Na tem intervalu sta obe strani nenegativni, zato lahko neenačbo kvadriramo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+1} < \frac{x+2}{2-x} \quad &\iff \quad 2x+1 < \frac{(x+2)^2}{(2-x)^2} \\
&\iff \quad (2x+1)(2-x)^2 < (x+2)^2 \\
&\iff \quad 2x^2(x-4) < 0 \\
&\iff \quad x^2(x-4) < 0.
\end{aligned}$$

Ker je $x^2 > 0$ za $x \neq 0$, produkt $x^2(x-4)$ je negativen, kadar je $x < 4$ in $x \neq 0$. Na intervalu $\left[-\frac{1}{2}, 2\right)$ to pomeni, da so rešitve vse vrednosti razen $x = 0$.

Zato je množica rešitev

$$\boxed{x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, 2)}.$$

□

$|x-1| < x+4$

Rešitev

Neenačba je definirana za vsako realno število, zato je definicijsko območje

$$D = \mathbb{R}.$$

Absolutno vrednost odpravimo tako, da obravnavamo dva primera.

1. primer: $x \geq 1$**.**

Tedaj je $x - 1 \geq 0$, zato velja $|x-1| = x-1$. Dobimo

$$|x-1| < x+4 \quad \Longleftrightarrow \quad x-1 < x+4 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < 4.$$

Zadnja neenačba vedno velja. Zato so v tem primeru rešitve vsa števila

$$x \in [1, \infty).$$

2. primer: $x < 1$**.**

Tedaj je $x - 1 < 0$, zato velja $|x-1| = -(x-1) = 1-x$. Dobimo

$$\begin{aligned} |x-1| < x+4 \quad &\Longleftrightarrow \quad 1-x < x+4 \\ &\Longleftrightarrow \quad -3 < 2x \\ &\Longleftrightarrow \quad x > -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Upoštevamo še pogoj tega primera, torej $x < 1$. Zato so rešitve v tem primeru

$$x \in \left(-\frac{3}{2}, 1\right).$$

Rešitve obeh primerov združimo:

$$\left(-\frac{3}{2}, 1\right) \cup [1, \infty) = \left(-\frac{3}{2}, \infty\right).$$

Množica rešitev je torej

$$\boxed{x \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)}.$$

□

$2|x-1|+|x+2|<4$

Rešitev

Absolutna vrednost je definirana za vsako realno število, zato je neenačba definirana za vse $x \in \mathbb{R}$:

$$D = \mathbb{R}.$$

Izraza v absolutnih vrednostih spremenita predznak pri

$$x-1=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=1, \qquad x+2=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=-2.$$

Zato številsko premico razdelimo na intervale

$$(-\infty,-2), \qquad [-2,1), \qquad [1,\infty).$$

Absolutna vrednost števila predstavlja njegovo razdaljo od nič. Zato je $|x-1|$ razdalja med številoma x in 1, medtem ko je $|x+2| = |x-(-2)|$ razdalja med številoma x in -2. Obe razdalji sta nenegativni.

Za odstranitev znakov absolutne vrednosti preverimo predznak izrazov $x-1$ in $x+2$:

$$|x-1| = \begin{cases} 1-x, & x<1, \\ x-1, & x \geq 1, \end{cases} \qquad |x+2| = \begin{cases} -x-2, & x<-2, \\ x+2, & x \geq -2. \end{cases}$$

Izraza spremenita predznak pri $x=1$ oziroma $x=-2$. Zato številsko premico razdelimo pri teh dveh vrednostih in na vsakem dobljenem intervalu uporabimo ustrezno vrstico zgornjih zapisov.

1. primer: $x<-2$**.**

Oba izraza $x-1$ in $x+2$ sta negativna, zato

$$|x-1| = 1-x, \qquad |x+2| = -x-2.$$

Dobimo

$$2(1-x)+(-x-2)<4 \quad \Longleftrightarrow \quad -3x<4 \quad \Longleftrightarrow \quad x>-\frac{4}{3}.$$

Ta pogoj ne velja za noben $x<-2$, zato v tem intervalu ni rešitev.

2. primer: $-2 \leq x < 1$**.**

Tedaj je $x-1<0$, medtem ko je $x+2 \geq 0$. Torej

$$|x-1| = 1-x, \qquad |x+2| = x+2.$$

Dobimo

$$2(1-x)+(x+2)<4 \quad \Longleftrightarrow \quad 4-x<4 \quad \Longleftrightarrow \quad x>0.$$

Ob upoštevanju pogoja $-2 \leq x < 1$ so rešitve tega primera

$$(0,1).$$

3. primer: $x \geq 1$**.**

Oba izraza sta nenegativna, zato

$$|x-1| = x-1, \qquad |x+2| = x+2.$$

Dobimo

$$2(x-1)+(x+2)<4 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x<4 \quad \Longleftrightarrow \quad x<\frac{4}{3}.$$

Ob upoštevanju pogoja $x \geq 1$ so rešitve tega primera

$$\left[1, \frac{4}{3}\right).$$

Združimo rešitve vseh treh primerov:

$$(0,1) \cup \left[1, \frac{4}{3}\right) = \left(0, \frac{4}{3}\right).$$

Zato je množica rešitev

$$\boxed{x \in \left(0, \frac{4}{3}\right)}.$$

□

$|x^2 + 4x + 3| < 2$

Rešitev

Naj bo

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3).$$

Ničli izrazov v produktu sta $x = -3$ in $x = -1$. Ker je vodilni koeficient kvadratnega polinoma pozitiven, je $f(x)$ pozitiven zunaj ničel in negativen med njima:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 3 &\geq 0 \quad \text{za } x \in (-\infty, -3] \cup [-1, \infty), \\ x^2 + 4x + 3 &< 0 \quad \text{za } x \in (-3, -1). \end{aligned}$$

Zato je absolutna vrednost enaka

$$|x^2 + 4x + 3| = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, & x \in (-\infty, -3] \cup [-1, \infty), \\ -(x^2 + 4x + 3), & x \in (-3, -1). \end{cases}$$

Absolutna vrednost je definirana za vsak realni x, torej je

$$D = \mathbb{R}.$$

Neenačbo rešimo ločeno na intervalih, kjer ima izraz v absolutni vrednosti določen predznak.

1. primer: $x \in (-\infty, -3] \cup [-1, \infty)$**.**

V tem primeru je $x^2 + 4x + 3 \geq 0$, zato neenačba postane

$$x^2 + 4x + 3 < 2.$$

Preoblikujemo:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 3 &< 2 \\ x^2 + 4x + 1 &< 0 \\ (x + 2)^2 &< 3 \\ -2 - \sqrt{3} < x &< -2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

To rešitev presekamo z intervaloma, na katerih velja $x^2 + 4x + 3 \geq 0$:

$$(-2 - \sqrt{3}, -3] \cup [-1, -2 + \sqrt{3}).$$

2. primer: $x \in (-3, -1)$**.**

V tem primeru je $x^2 + 4x + 3 < 0$, zato je

$$|x^2 + 4x + 3| = -(x^2 + 4x + 3).$$

Neenačba postane

$$\begin{aligned} -(x^2 + 4x + 3) &< 2 \\ x^2 + 4x + 5 &> 0 \\ (x + 2)^2 + 1 &> 0. \end{aligned}$$

Zadnja neenačba velja za vsak realni x, zato so v tem primeru rešitve vse vrednosti iz intervala $(-3, -1)$.

Združimo rešitve obeh primerov:

$$(-2 - \sqrt{3}, -3] \cup (-3, -1) \cup [-1, -2 + \sqrt{3}) = (-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}).$$

Množica rešitev je torej

$$\boxed{x \in (-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3})}.$$

□

$\Big||x + 1| - |2x - 1|\Big| \leq 1$

Rešitev

Vsi izrazi v neenačbi so definirani za vsako realno število, zato je

$$D = \mathbb{R}.$$

Najprej določimo predznaka izrazov v notranjih absolutnih vrednostih:

$$x + 1 = 0 \iff x = -1, \qquad 2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

Zato številsko premico razdelimo na intervale

$$(-\infty, -1), \qquad \left[-1, \frac{1}{2}\right), \qquad \left[\frac{1}{2}, \infty\right).$$

Sedaj zapišemo vsako absolutno vrednost posebej. Predznak izraza $x + 1$ se spremeni pri $x = -1$,

predznak izraza $2x-1$ pa pri $x=\frac{1}{2}$. Zato velja

$$|x+1| = \begin{cases} -x-1, & x < -1, \\ x+1, & x \geq -1, \end{cases} \qquad |2x-1| = \begin{cases} 1-2x, & x < \frac{1}{2}, \\ 2x-1, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Točki $x=-1$ in $x=\frac{1}{2}$ razdelita številsko premico na tri intervale. Na vsakem intervalu uporabimo ustrezna izraza iz zgornjih zapisov.

- Če je $x < -1$, uporabimo prvi izraz za obe absolutni vrednosti:

$$|x+1| - |2x-1| = (-x-1) - (1-2x) = x-2.$$

- Če je $-1 \leq x < \frac{1}{2}$, uporabimo drugi izraz za $|x+1|$ in prvi izraz za $|2x-1|$:

$$|x+1| - |2x-1| = (x+1) - (1-2x) = 3x.$$

- Če je $x \geq \frac{1}{2}$, uporabimo drugi izraz za obe absolutni vrednosti:

$$|x+1| - |2x-1| = (x+1) - (2x-1) = 2-x.$$

Torej velja

$$|x+1| - |2x-1| = \begin{cases} x-2, & x < -1, \\ 3x, & -1 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2-x, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Tako neenačbo rešujemo po primerih.

1. primer: $x < -1$**.**

Tedaj je

$$\Big||x+1| - |2x-1|\Big| = |x-2|.$$

Rešimo:

$$|x-2| \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \leq x-2 \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leq x \leq 3.$$

Nobena od teh vrednosti ne zadošča pogoju $x < -1$, zato v tem primeru ni rešitev.

2. primer: $-1 \leq x < \frac{1}{2}$**.**

Tedaj je

$$\Big||x+1| - |2x-1|\Big| = |3x|.$$

Zato

$$|3x| \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \leq 3x \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}.$$

Vse dobljene vrednosti zadoščajo pogoju $-1 \leq x < \frac{1}{2}$, zato so rešitve tega primera

$$\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

3. primer: $x \geq \frac{1}{2}$**.**

Tedaj je

$$\Big||x+1| - |2x-1|\Big| = |2-x|.$$

Zato

$$|2-x| \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \leq 2-x \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leq x \leq 3.$$

Te vrednosti zadoščajo pogoju $x \geq \frac{1}{2}$, zato so rešitve tega primera

$$[1, 3].$$

Združimo rešitve vseh treh primerov. Množica rešitev je

$$\boxed{x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \cup [1, 3]}.$$

□

$|x^3 - x^2| < |x^2 + x|$

Rešitev

Neenačba je definirana za vsako realno število, zato je definicijsko območje

$$D = \mathbb{R}.$$

Najprej razcepimo izraza:

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1), \qquad x^2 + x = x(x+1).$$

Predznaki se lahko spremenijo pri $x = -1$, $x = 0$ in $x = 1$. Zato obravnavamo naslednje primere.

1. primer: $x < -1$**.**

Tedaj je $x^3 - x^2 < 0$, izraz $x^2 + x$ pa je pozitiven. Zato dobimo

$$\begin{aligned} |x^3 - x^2| < |x^2 + x| \quad &\iff \quad -x^3 + x^2 < x^2 + x \\ &\iff \quad -x^3 - x < 0 \\ &\iff \quad -x(x^2 + 1) < 0. \end{aligned}$$

Ker je $x < 0$, je $-x > 0$. Tudi $x^2 + 1 > 0$, zato je produkt $-x(x^2 + 1)$ pozitiven. V tem primeru torej **ni rešitev**.

2. primer: $-1 \leq x < 0$**.**

Tedaj je $x^3 - x^2 < 0$ in $x^2 + x \leq 0$. Zato dobimo

$$\begin{aligned} |x^3 - x^2| < |x^2 + x| \quad &\iff \quad -x^3 + x^2 < -x^2 - x \\ &\iff \quad x(-x^2 + 2x + 1) < 0. \end{aligned}$$

Ker je $x < 0$, pri deljenju z x obrnemo smer neenačaja:

$$-x^2 + 2x + 1 > 0 \quad \iff \quad x^2 - 2x - 1 < 0.$$

Ničli kvadratnega izraza sta

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Ker je koeficient pri x^2 pozitiven, je izraz negativen med ničlama:

$$1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}.$$

Upoštevamo še pogoj $-1 \leq x < 0$. Rešitve v tem primeru so

$$x \in (1 - \sqrt{2}, 0).$$

3. primer: $0 \leq x < 1$**.**

Tedaj je $x^3 - x^2 \leq 0$ in $x^2 + x \geq 0$. Zato dobimo

$$\begin{aligned} |x^3 - x^2| < |x^2 + x| \quad &\iff \quad -x^3 + x^2 < x^2 + x \\ &\iff \quad x^3 + x > 0 \\ &\iff \quad x(x^2 + 1) > 0. \end{aligned}$$

Ker je $x^2 + 1 > 0$, zadnja neenačba velja natanko tedaj, ko je $x > 0$. Upoštevamo še pogoj $x < 1$.

Rešitve v tem primeru so

$$x \in (0, 1).$$

Pri $x = 0$ dobimo $0 < 0$, kar ne velja.

4. primer: $x \geq 1$**.**

Oba izraza sta nenegativna, zato dobimo

$$\begin{aligned} |x^3 - x^2| < |x^2 + x| \quad &\iff \quad x^3 - x^2 < x^2 + x \\ &\iff \quad x(x^2 - 2x - 1) < 0. \end{aligned}$$

Ker je $x \geq 1$, je $x > 0$, zato lahko delimo z x:

$$x^2 - 2x - 1 < 0.$$

Kot smo že izračunali, to velja za

$$1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}.$$

Upoštevamo še pogoj $x \geq 1$. Rešitve v tem primeru so

$$x \in [1, 1 + \sqrt{2}).$$

Rešitve vseh primerov združimo:

$$(1 - \sqrt{2}, 0) \cup (0, 1) \cup [1, 1 + \sqrt{2}).$$

Množica rešitev je torej

$$\boxed{x \in (1 - \sqrt{2}, 0) \cup (0, 1 + \sqrt{2})}.$$

□

$$\frac{3 - x}{x + 1} > \sqrt{3 - 2x}$$

Rešitev

Najprej določimo, kje je neenačba definirana. Imenovalec ne sme biti enak nič, podkorenjski izraz pa mora biti nenegativen:

$$x + 1 \neq 0 \quad \text{in} \quad 3 - 2x \geq 0.$$

Od tod dobimo

$$x \neq -1 \quad \text{in} \quad x \leq \frac{3}{2}.$$

Definicijsko območje je zato

$$D = (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{3}{2}\right].$$

Ker je desna stran neenačbe nenegativna, mora biti leva stran pozitivna. Na definicijskem območju velja

$$3 - x \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} > 0.$$

Zato je ulomek

$$\frac{3-x}{x+1} > 0$$

natanko tedaj, ko je $x + 1 > 0$, torej ko je $x > -1$.

Za $x < -1$ neenačba nima rešitev. Obravnavamo torej samo interval

$$-1 < x \leq \frac{3}{2}.$$

Na tem intervalu je leva stran pozitivna, desna pa nenegativna, zato lahko neenačbo ekvivalentno kvadriramo:

$$\begin{aligned} \frac{3-x}{x+1} > \sqrt{3-2x} \quad &\iff \quad \frac{(3-x)^2}{(x+1)^2} > 3 - 2x \\ &\iff \quad (3-x)^2 > (3-2x)(x+1)^2. \end{aligned}$$

Pri zadnjem koraku smo množili s pozitivnim številom $(x+1)^2$, zato se smer neenačaja ni spremenila.

Razširimo oklepaje in prenesemo vse člene na levo stran:

$$\begin{aligned} (3-x)^2 - (3-2x)(x+1)^2 &> 0 \\ x^2 - 6x + 9 - (-2x^3 - x^2 + 4x + 3) &> 0 \\ 2x^3 + 2x^2 - 10x + 6 &> 0 \\ 2(x-1)^2(x+3) &> 0. \end{aligned}$$

Na obravnavanem intervalu je $x + 3 > 0$. Kvadrat $(x-1)^2$ pa je pozitiven za vsak $x \neq 1$ in enak nič pri $x = 1$. Zato neenačba velja za vse

$$x \in \left(-1, \frac{3}{2}\right], \qquad x \neq 1.$$

Pri $x = 1$ sta obe strani začetne neenačbe enaki 1, zato ta vrednost ni rešitev. Vrednost $x = \frac{3}{2}$ pa je rešitev, saj dobimo

$$\frac{3 - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{3}{5} > 0 = \sqrt{3 - 2 \cdot \frac{3}{2}}.$$

Množica rešitev je torej

$$\boxed{x \in (-1, 1) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]}.$$

□

$\Big|x + |2x + 4|\Big| \geq 2$

Rešitev

Neenačba je definirana za vsako realno število, zato je definicijsko območje

$$D = \mathbb{R}.$$

Najprej odpravimo notranjo absolutno vrednost. Ker velja

$$2x + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -2,$$

obravnavamo dva primera.

1. primer: $x < -2$**.**

Tedaj je $2x + 4 < 0$, zato velja

$$|2x + 4| = -(2x + 4) = -2x - 4.$$

Dobimo

$$\Big|x + |2x + 4|\Big| = |x - 2x - 4| = |-x - 4| = |x + 4|.$$

Začetna neenačba je torej enakovredna neenačbi

$$|x + 4| \geq 2.$$

Absolutna vrednost je vsaj 2, če je izraz vsaj 2 ali največ -2:

$$x + 4 \geq 2 \quad \text{ali} \quad x + 4 \leq -2.$$

Od tod dobimo

$$x \geq -2 \quad \text{ali} \quad x \leq -6.$$

Upoštevamo še pogoj tega primera, torej $x < -2$. Možnost $x \geq -2$ zato odpade.

Rešitve v tem primeru so

$$x \in (-\infty, -6].$$

2. primer: $x \geq -2$.

Tedaj je $2x + 4 \geq 0$, zato velja

$$|2x + 4| = 2x + 4.$$

Dobimo

$$\Big|x + |2x + 4|\Big| = |x + 2x + 4| = |3x + 4|.$$

Zato rešujemo neenačbo

$$|3x + 4| \geq 2.$$

To pomeni

$$3x + 4 \geq 2 \quad \text{ali} \quad 3x + 4 \leq -2.$$

Od tod dobimo

$$x \geq -\frac{2}{3} \quad \text{ali} \quad x \leq -2.$$

Upoštevamo še pogoj $x \geq -2$:

- vse vrednosti $x \geq -\frac{2}{3}$ izpolnjujejo ta pogoj;
- pri možnosti $x \leq -2$ ostane samo $x = -2$.

Rešitve v tem primeru so torej

$$x \in \{-2\} \cup \left[-\frac{2}{3}, \infty\right).$$

Rešitve obeh primerov združimo. Množica rešitev je

$$\boxed{x \in (-\infty, -6] \cup \{-2\} \cup \left[-\frac{2}{3}, \infty\right).}$$

Pri $x = -6$, $x = -2$ in $x = -\frac{2}{3}$ je leva stran začetne neenačbe enaka 2. Ker je enakost dovoljena, vse tri vrednosti spadajo v množico rešitev. □

$|x^2 - x| - |x| < 8$

Rešitev

Neenačba je definirana za vsako realno število, zato je definicijsko območje

$$D = \mathbb{R}.$$

Izraz v prvi absolutni vrednosti razcepimo:

$$x^2 - x = x(x-1).$$

Predznaki izrazov $x(x-1)$ in x se lahko spremenijo pri $x = 0$ in $x = 1$. Zato obravnavamo tri primere.

1. primer: $x < 0$**.**

Tedaj sta $x < 0$ in $x - 1 < 0$, zato je $x(x-1) > 0$. Torej velja

$$|x^2 - x| = x^2 - x, \qquad |x| = -x.$$

Dobimo

$$\begin{aligned} |x^2 - x| - |x| < 8 \quad &\iff \quad x^2 - x - (-x) < 8 \\ &\iff \quad x^2 < 8 \\ &\iff \quad -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Upoštevamo še pogoj $x < 0$. Rešitve v tem primeru so

$$x \in (-2\sqrt{2}, 0).$$

2. primer: $0 \leq x < 1$**.**

Tedaj je $x(x-1) \leq 0$ in $x \geq 0$, zato velja

$$|x^2 - x| = -(x^2 - x) = -x^2 + x, \qquad |x| = x.$$

Dobimo

$$\begin{aligned} |x^2 - x| - |x| < 8 \quad &\iff \quad -x^2 + x - x < 8 \\ &\iff \quad -x^2 < 8. \end{aligned}$$

Ker je $-x^2 \leq 0 < 8$, zadnja neenačba vedno velja. Zato so rešitve v tem primeru vsa števila

$$x \in [0, 1).$$

3. primer: $x \geq 1$**.**

Tedaj je $x(x-1) \geq 0$ in $x > 0$, zato velja

$$|x^2 - x| = x^2 - x, \qquad |x| = x.$$

Dobimo

$$\begin{aligned} |x^2 - x| - |x| < 8 \quad &\iff \quad x^2 - x - x < 8 \\ &\iff \quad x^2 - 2x - 8 < 0 \\ &\iff \quad (x-4)(x+2) < 0. \end{aligned}$$

Produkt je negativen med ničlama, zato velja

$$-2 < x < 4.$$

Upoštevamo še pogoj $x \geq 1$. Rešitve v tem primeru so

$$x \in [1, 4).$$

Rešitve vseh treh primerov združimo:

$$(-2\sqrt{2}, 0) \cup [0, 1) \cup [1, 4) = (-2\sqrt{2}, 4).$$

Množica rešitev je torej

$$\boxed{x \in (-2\sqrt{2}, 4)}.$$

□

Analiza I

Povzetek 4. vaj

Kompleksna Števila

1. Definicija in binomska oblika

Imaginarna enota i zadošča enačbi $i^2 = -1$. Množica kompleksnih števil je

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Zapis $z = a + ib$ imenujemo **binomska oblika**. Število a je realni del, število b pa imaginarni del:

$$\operatorname{Re} z = a, \qquad \operatorname{Im} z = b.$$

Pozor: imaginarni del je realno število b, ne izraz ib. Če je $b = 0$, je z realno število. Zato realna števila obravnavamo kot podmnožico $\mathbb{C}$. Če je $a = 0$ in $b \neq 0$, je z čisto imaginarno število.

Enakost v binomski obliki. Za $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ velja

$$\boxed{a + ib = c + id \quad \Longleftrightarrow \quad a = c \text{ in } b = d.}$$

Primer: iz $x + i(2y - 1) = 3 + 5i$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$, sledi $x = 3$ in $2y - 1 = 5$. Torej je $y = 3$.

2. Računske operacije in njihove lastnosti

Naj bosta $z = a + ib$ in $w = c + id$. Velja

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c) + i(b + d), \\ z - w &= (a - c) + i(b - d), \\ zw &= (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned}$$

Pri množenju razširimo oklepaje in uporabimo $i^2 = -1$. Če je $w \neq 0$, ulomek razširimo s številom $c - id$:

$$\boxed{\frac{z}{w} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.}$$

Primer:

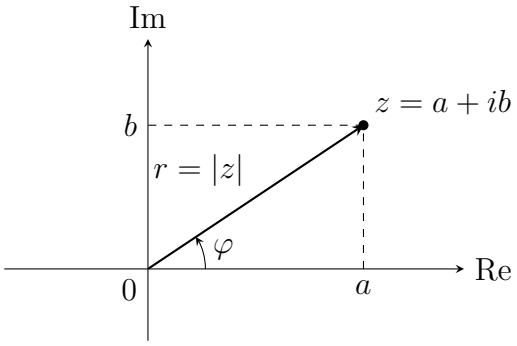
$$\frac{1 + 2i}{1 - i} = \frac{(1 + 2i)(1 + i)}{2} = \frac{-1 + 3i}{2}.$$

Seštevanje in množenje sta komutativna in asociativna. Velja distributivnost $z(u + v) = zu + zv$. Nevtralna elementa sta 0 za seštevanje in 1 za množenje. Vsak z ima nasprotno število $-z$; vsak $z \neq 0$ ima obratno število $1/z$.

Potence števila i. Velja $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ in $i^4 = 1$. Potence se ponavljajo s periodo 4: $i^{m+4} = i^m$ za vsak celoštevilski m.

3. Upodobitev v kompleksni ravnini

Številu $z = a + ib$ priredimo točko (a, b). Vodoravna os je realna os, navpična pa imaginarna os. Število lahko predstavimo tudi z vektorjem od izhodišča do točke (a, b).



Vsoto kompleksnih števil dobimo s seštevanjem njunih vektorjev. Razlika $z - w$ predstavlja vektor od točke w do točke z.

4. Konjugirano število

Konjugirano število števila $z = a + ib$ je

$$\boxed{\overline{z} = a - ib.}$$

Geometrijsko je $\overline{z}$ zrcalna slika števila z čez realno os. Na primer: če je $z = -2 + 3i$, je $\overline{z} = -2 - 3i$.

$$\overline{\overline{z}} = z, \qquad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w},$$
$$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \qquad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \quad (w \neq 0).$$

Poleg tega velja

$$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z, \qquad z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z, \qquad z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}.$$

5. Modul kompleksnega števila

Modul je razdalja od izhodišča do točke z:

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad z\overline{z} = |z|^2.}$$

Velja $|z| \geq 0$ in $|z| = 0 \iff z = 0$. Pomembne lastnosti so

$$|\overline{z}| = |z|, \qquad |zw| = |z|\,|w|,$$
$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0), \qquad |z + w| \leq |z| + |w|.$$

Razdalja med točkama z in w je $|z - w|$. Za $z \neq 0$ velja $1/z = \overline{z}/|z|^2$.

6. Argument in trigonometrična oblika

Za $z = a + ib \neq 0$ naj bo $r = |z|$. **Argument** je kot φ, za katerega velja

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi.$$

Kot merimo od pozitivnega dela realne osi; pozitivna smer je nasprotna smeri urnega kazalca. **V tem povzetku izberemo** $\varphi \in [0, 2\pi)$. Vsi argumenti števila z so $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Število 0 nima argumenta.

Trigonometrična oblika neničelnega kompleksnega števila je

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad r > 0.}$$

Kako določimo argument po kvadrantih?

Če sta $a \neq 0$ in $b \neq 0$, najprej določimo **pripadajoči ostri kot** α v prvem kvadrantu:

$$\boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{|b|}{|a|}\right) \in (0, \pi/2).}$$

Nato pogledamo predznaka a in b:

kvadrant	a	b	izbrani argument φ
I	>0	>0	α
II	<0	>0	$\pi-\alpha$
III	<0	<0	$\pi+\alpha$
IV	>0	<0	$2\pi-\alpha$

Če število leži na koordinatni osi, uporabimo naslednje vrednosti:

pogoj	φ
$a>0,\ b=0$	0
$a=0,\ b>0$	$\pi/2$
$a<0,\ b=0$	π
$a=0,\ b<0$	$3\pi/2$

Primer. Naj bo $z=-\sqrt{3}+i$. Modul je $r=2$. Ker je $a<0$ in $b>0$, je število v drugem kvadrantu. Velja

$$\alpha=\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6},\qquad \varphi=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}.$$

Zato je $z=2\Big(\cos(5\pi/6)+i\sin(5\pi/6)\Big)$. Vsi njegovi argumenti so $5\pi/6+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Pozor. Enačba $\tan\varphi=b/a$ sama ne določi kvadranta: tangens ima periodo π. Vedno preverimo predznaka realnega in imaginarnega dela.

Trigonometrične formule in vrednosti pri posebnih kotih

Sinus in kosinus vsote ter razlike kotov

Za poljubna realna kota α in β veljajo formule:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}}$$

Kako si zapomnimo predznake? Pri kosinusu se predznak spremeni: pri vsoti kotov uporabimo minus, pri razliki pa plus. Pri sinusu predznak ostane enak: pri vsoti uporabimo plus, pri razliki pa minus.

Tangens kota

Tangens je količnik sinusa in kosinusa:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \cos\alpha \neq 0.}$$

Če je $\cos\alpha = 0$, tangens ni definiran. Zato na primer $\tan 90^\circ$ ni definiran.

Stopinje in radiani

Velja

$$180^\circ = \pi \text{ radianov.}$$

Iz stopinj v radiane pretvorimo tako:

$$\text{kot v radianih} = \frac{\text{kot v stopinjah}}{180^\circ} \cdot \pi.$$

Na primer:

$$15^\circ = \frac{15}{180}\pi = \frac{\pi}{12}, \qquad 75^\circ = \frac{75}{180}\pi = \frac{5\pi}{12}.$$

Tabela vrednosti za kote od 0° do 90°

Koti med 0° in 90° ležijo v prvem kvadrantu. Kota 0° in 90° sta na njegovem robu.

α v stopinjah	α v radianih	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$0°$	0	0	1	0
$15°$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$75°$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	ni definiran

Primer: kako izračunamo vrednosti pri kotu $15°$?

Ker je $15° = 45° - 30°$, uporabimo formuli za razliko kotov:

$$\begin{aligned}\cos 15° &= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 15° &= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Tangens dobimo z deljenjem:

$$\begin{aligned}\tan 15^\circ &= \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} \\ &= \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Vrednosti pri kotu 75° lahko podobno izračunamo iz zapisa $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$.

Pripadajoči ostri kot in predznaki sinusa ter kosinusa

Pri računanju sinusa in kosinusa najprej določimo, v katerem kvadrantu leži kot. Nato poiščemo **pripadajoči ostri kot**. Z njegovo pomočjo poiščemo absolutni vrednosti sinusa in kosinusa, predznaka pa določimo glede na kvadrant.

Označimo kot, katerega vrednosti računamo, z θ. Če je potrebno, najprej od θ odštejemo ali prištejemo večkratnik 2π in dobimo kot α iz intervala $[0, 2\pi)$:

$$\alpha = \theta - 2k\pi \qquad \text{za neko število } k \in \mathbb{Z}.$$

Kota θ in α imata isti krak, zato velja

$$\sin\theta = \sin\alpha \qquad \text{in} \qquad \cos\theta = \cos\alpha.$$

Kot α nam torej pove, v katerem kvadrantu leži krak kota. Pripadajoči ostri kot označimo z β. To je kot med krakom kota α in najbližjo osjo x. Vedno velja

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Kot β ni kot, katerega vrednosti iščemo, ampak nam pomaga poiskati te vrednosti v tabeli za ostre kote.

Kvadrant kota α	**Predznak** $\sin\alpha$	**Predznak** $\cos\alpha$	**Predznak** $\tan\alpha$
I.	$+$	$+$	$+$
II.	$+$	$-$	$-$
III.	$-$	$-$	$+$
IV.	$-$	$+$	$-$

Pripadajoči ostri kot β določimo glede na kvadrant kota α:

Kvadrant, v katerem leži α	Pripadajoči ostri kot β	Vrednosti sinusa in kosinusa
I.	$\beta = \alpha$	$\sin\alpha = \sin\beta, \quad \cos\alpha = \cos\beta$
II.	$\beta = \pi - \alpha$	$\sin\alpha = \sin\beta, \quad \cos\alpha = -\cos\beta$
III.	$\beta = \alpha - \pi$	$\sin\alpha = -\sin\beta, \quad \cos\alpha = -\cos\beta$
IV.	$\beta = 2\pi - \alpha$	$\sin\alpha = -\sin\beta, \quad \cos\alpha = \cos\beta$

Primer 1: Izračunajmo vrednosti pri kotu $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$.

Ta kot že leži v intervalu $[0, 2\pi)$, zato je

$$\alpha = \frac{4\pi}{3}.$$

Ker velja

$$\pi < \frac{4\pi}{3} < \frac{3\pi}{2},$$

kot α leži v tretjem kvadrantu. Pripadajoči ostri kot je

$$\beta = \alpha - \pi = \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}.$$

V tretjem kvadrantu sta sinus in kosinus negativna. Zato uporabimo vrednosti pri ostrem kotu $\beta = \dfrac{\pi}{3}$ in dodamo ustrezna predznaka:

$$\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Primer 2: Izračunajmo vrednosti pri kotu $\theta = \dfrac{23\pi}{6}$.

Kot najprej zmanjšamo za $2\pi = \dfrac{12\pi}{6}$:

$$\alpha = \theta - 2\pi = \frac{23\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

Kota θ in α imata isti krak, zato imata enake vrednosti sinusa in kosinusa. Kot $\alpha = \dfrac{11\pi}{6}$ leži v četrtem kvadrantu. Njegov pripadajoči ostri kot je

$$\beta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

V četrtem kvadrantu je sinus negativen, kosinus pa pozitiven. Zato

$$\sin\frac{23\pi}{6} = \sin\frac{11\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{23\pi}{6} = \cos\frac{11\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pri nekaterih kotih krak kota leži na eni od koordinatnih osi. Takrat kot ne leži v nobenem kvadrantu, zato ne določamo pripadajočega ostrega kota. Sinus in kosinus odčitamo neposredno z enotske krožnice.

Na enotski krožnici kotu α pripada točka s koordinatama $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Prva koordinata točke je torej kosinus kota, druga pa sinus kota. Zato pri kotih, katerih krak leži na oseh, dobimo:

α	Točka na enotski krožnici	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
0	$(1,0)$	1	0
$\frac{\pi}{2}$	$(0,1)$	0	1
π	$(-1,0)$	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	$(0,-1)$	0	-1
2π	$(1,0)$	1	0

Na primer, pri kotu $\frac{\pi}{2}$ je pripadajoča točka na enotski krožnici $(0,1)$. Zato je

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \text{in} \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Ker je pri kotih $\frac{\pi}{2}$ in $\frac{3\pi}{2}$ kosinus enak 0, tangens pri teh kotih ni definiran.

7. Enakost v trigonometrični obliki

Naj bosta $z = r\Big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\Big)$ in $w = s\Big(\cos(\psi) + i\sin(\psi)\Big)$, kjer sta $r, s > 0$. Tedaj

$$\boxed{z = w \iff r = s \text{ in } \varphi - \psi = 2k\pi \text{ za neki } k \in \mathbb{Z}.}$$

Torej morata biti modula enaka, argumenta pa enaka do celoštevilskega večkratnika 2π. Če sta oba kota izbrana v $[0, 2\pi)$, to pomeni $r = s$ in $\varphi = \psi$.

Primer: $2\Big(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)\Big) = 2\Big(\cos(7\pi/3) + i\sin(7\pi/3)\Big)$, ker se kota razlikujeta za 2π.

Ničla. Zapis $0\Big(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)\Big)$ ima vrednost 0 pri vsakem kotu, vendar kot φ ni argument ničle. Zgornji kriterij velja za pozitivna modula.

8. Množenje, deljenje in konjugiranje

Za $z=r\Big(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)\Big)$ in $w=s\Big(\cos(\psi)+i\sin(\psi)\Big)$, kjer sta $r,s>0$, velja

$$\begin{aligned} zw &= rs\Big(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)\Big),\\ \frac{z}{w} &= \frac{r}{s}\Big(\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi)\Big),\\ \overline{z} &= r\Big(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)\Big). \end{aligned}$$

Pri množenju module množimo in argumente seštejemo. Pri deljenju module delimo in argumente odštejemo. Dobljeni kot po potrebi premaknemo v $[0,2\pi)$ z dodatkom večkratnika 2π.

Argument konjugiranega števila. Če je $\varphi=0$, je izbrani argument števila $\overline{z}$ enak 0. Če je $0<\varphi<2\pi$, je enak $2\pi-\varphi$.

9. De Moivrova formula

Za vsak realni kot φ in vsako celo število m velja

$$\boxed{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^m=\cos(m\varphi)+i\sin(m\varphi).}$$

Zato za $z=r\Big(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)\Big)\neq 0$ velja

$$\boxed{z^m=r^m\Big(\cos(m\varphi)+i\sin(m\varphi)\Big),\qquad m\in\mathbb{Z}.}$$

Za ničlo so pozitivne celoštevilske potence enake nič; negativne potence ničle niso definirane. Izraza 0^0 tukaj ne uporabljamo.

Primer. Ker je $1+i=\sqrt{2}\Big(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\Big)$, dobimo

$$(1+i)^6=(\sqrt{2})^6\Big(\cos(6\pi/4)+i\sin(6\pi/4)\Big)=8\Big(\cos(3\pi/2)+i\sin(3\pi/2)\Big)=-8i.$$

10. Vsi n-ti koreni kompleksnega števila

Naj bo $n \geq 2$ celo število. **n-ti koren** števila w je vsako število z, za katero velja $z^n = w$.

Če je $w = 0$, je edina rešitev $z = 0$. Naj bo zdaj

$$w = \rho\Big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\Big), \qquad \rho > 0.$$

Enačba $z^n = w$ ima natanko n različnih rešitev:

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.}$$

Tu $\sqrt[n]{\rho}$ pomeni pozitivni realni n-ti koren pozitivnega števila ρ.

Zakaj formula velja? Pišemo $z = r\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)$. Po De Moivrovi formuli in kriteriju za enakost velja

$$z^n = w \quad \Longleftrightarrow \quad r^n = \rho \text{ in } n\theta = \varphi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Zato je $r = \sqrt[n]{\rho}$ in $\theta = (\varphi + 2k\pi)/n$. Za $k = 0, \ldots, n-1$ dobimo različne kote modulo 2π. Pri zamenjavi k s $k + n$ se kot poveča za 2π, zato se koreni začnejo ponavljati.

Geometrijski pomen. Vsi koreni ležijo na krožnici s središčem v izhodišču in polmerom $\sqrt[n]{\rho}$. Kot med zaporednima korenoma je $2\pi/n$. Za $n \geq 3$ tvorijo oglišča pravilnega n-kotnika. Za $n = 2$ sta korena nasprotni točki na krožnici.

Primer: poiščimo vse rešitve enačbe $z^4 = -16$

Najprej zapišemo $-16 = 16\Big(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\Big)$. Modul korenov je $\sqrt[4]{16} = 2$, njihovi koti pa so

$$\frac{\pi + 2k\pi}{4}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Dobimo

k	argument	binomska oblika
0	$\pi/4$	$\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
1	$3\pi/4$	$-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
2	$5\pi/4$	$-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
3	$7\pi/4$	$\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

Preverjanje. Četrta potenca vsakega korena ima modul 16 in argument $\pi + 2k\pi$. Zato je enaka -16.

Pomembno. Pri iskanju vseh korenov ne smemo samo deliti izbranega argumenta z n. Pred deljenjem dodamo $2k\pi$ in upoštevamo vseh n vrednosti k.

Izračunajte in poenostavite. Rezultate zapišite v obliki $a + bi$:

(a) $\dfrac{4+2i}{1-i}$,

(b) $\dfrac{3-5i}{2+i}$,

(c) $i^{17} + i^{38} - i^{105} + i^{2026}$,

(d) $(1+i)^2 + (1-i)^3$.

Rešitev

(a) **Izračunajmo $\dfrac{4+2i}{1-i}$.**

Ulomek razširimo s konjugiranim številom imenovalca. Konjugirano število števila $1 - i$ je $1 + i$. Zato števec in imenovalec pomnožimo z $1 + i$:

$$\begin{aligned}\frac{4+2i}{1-i} &= \frac{(4+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{4+4i+2i+2i^2}{1-i^2} \\ &= \frac{4+6i-2}{1+1} \\ &= \frac{2+6i}{2} \\ &= \boxed{1+3i}.\end{aligned}$$

Pri računanju smo uporabili $i^2 = -1$.

(b) **Izračunajmo $\dfrac{3-5i}{2+i}$.**

Konjugirano število imenovalca $2+i$ je $2-i$. Ulomek razširimo s tem številom:

$$\begin{aligned}\frac{3-5i}{2+i} &= \frac{(3-5i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\\ &= \frac{6-3i-10i+5i^2}{4-i^2}\\ &= \frac{6-13i-5}{4+1}\\ &= \frac{1-13i}{5}\\ &= \boxed{\frac{1}{5}-\frac{13}{5}i}.\end{aligned}$$

(c) **Izračunajmo $i^{17}+i^{38}-i^{105}+i^{2026}$.**

Potence števila i se ponavljajo s periodo 4:

$$i^0=1, \qquad i^1=i, \qquad i^2=-1, \qquad i^3=-i, \qquad i^4=1.$$

Vsak eksponent zapišemo v obliki $4q+r$. Ker je $i^4=1$, je vrednost potence odvisna samo od ostanka r:

$$\begin{aligned}17 &= 4\cdot 4+1 \quad &\Longrightarrow \quad i^{17}&=i,\\ 38 &= 4\cdot 9+2 \quad &\Longrightarrow \quad i^{38}&=i^2=-1,\\ 105 &= 4\cdot 26+1 \quad &\Longrightarrow \quad i^{105}&=i,\\ 2026 &= 4\cdot 506+2 \quad &\Longrightarrow \quad i^{2026}&=i^2=-1.\end{aligned}$$

Te vrednosti vstavimo v izraz:

$$\begin{aligned}i^{17}+i^{38}-i^{105}+i^{2026} &= i+(-1)-i+(-1)\\ &= (i-i)+(-1-1)\\ &= -2+0i = \boxed{-2}.\end{aligned}$$

(d) **Izračunajmo $(1+i)^2+(1-i)^3$.**

Najprej izračunamo vsako potenco posebej. Za prvo velja

$$\begin{aligned}(1+i)^2 &= 1+2i+i^2\\ &= 1+2i-1\\ &= 2i.\end{aligned}$$

Za drugo najprej izračunamo kvadrat:

$$(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i.$$

Nato pomnožimo še z $1-i$:

$$\begin{aligned}(1-i)^3 &= (1-i)^2(1-i)\\ &= (-2i)(1-i)\\ &= -2i + 2i^2\\ &= -2 - 2i.\end{aligned}$$

Na koncu seštejemo rezultata:

$$(1+i)^2 + (1-i)^3 = 2i + (-2-2i) = -2 + 0i = \boxed{-2}.$$

□

Skiciraj naslednje podmnožice kompleksnih števil:

(a) $\{z \in \mathbb{C}\colon |z+i+1| \geq 2\}$,

(b) $\{z \in \mathbb{C}\colon |z-1| = |z-i|\}$,

(c) $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(z^2) + i\operatorname{Im}(\overline{z}(1+2i)) = -3\}$,

(d) $\{z \in \mathbb{C}\colon 2(\operatorname{Re}(z))^2 + \operatorname{Im}(z) < 1\}$.

Rešitev

Pri vseh nalogah zapišemo $z = x + iy$, kjer $x, y \in \mathbb{R}$. Kompleksnemu številu z pripada točka (x, y) v kompleksni ravnini.

(a) **Množica $\{z \in \mathbb{C} : |z+i+1| \geq 2\}$.**

Najprej vstavimo $z = x + iy$:

$$z + i + 1 = (x+1) + i(y+1).$$

Zato velja

$$|z+i+1| = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}.$$

Začetni pogoj je torej

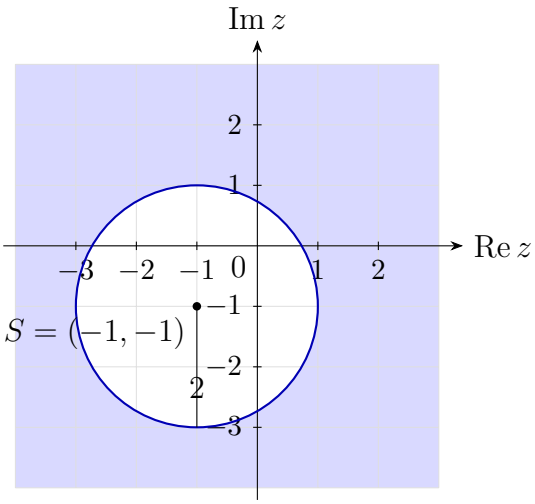
$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \geq 2.$$

Obe strani sta nenegativni, zato lahko neenačbo ekvivalentno kvadriramo:

$$\boxed{(x+1)^2 + (y+1)^2 \geq 4.}$$

Enačba $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$ opisuje krožnico s središčem $S = (-1, -1)$ in polmerom 2.

Iskana množica vsebuje vse točke, katerih razdalja od središča S je vsaj 2. Zato obarvamo **zunanjost krožnice skupaj s krožnico**. Krožnico narišemo s polno črto, ker rob spada v množico.



(b) **Množica** $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z-i|\}$**.**

Izraz $|z-1|$ pomeni razdaljo točke z od točke $A = (1,0)$. Izraz $|z-i|$ pomeni razdaljo točke z od točke $B = (0,1)$.

Iščemo točke, ki so od A in B enako oddaljene. Vstavimo $z = x + iy$:

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}.$$

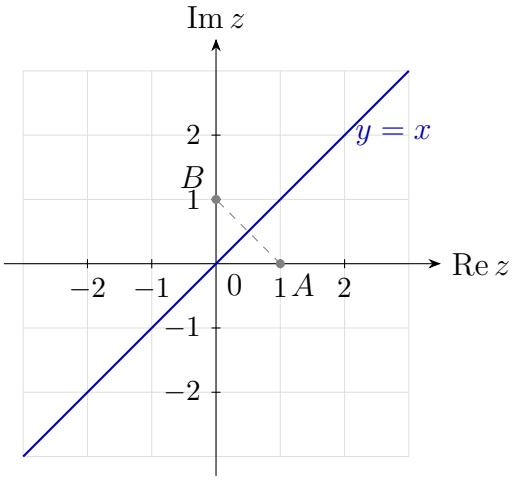
Obe strani sta nenegativni, zato enačbo ekvivalentno kvadriramo:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + y^2 &= x^2 + (y-1)^2, \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 &= x^2 + y^2 - 2y + 1, \\ -2x &= -2y, \\ y &= x. \end{aligned}$$

Iskana množica je torej

$$\boxed{\{x + iy : x, y \in \mathbb{R},\ y = x\}.}$$

To je **celotna premica** $y = x$, ki je simetrala daljice AB.



(c) **Množica**

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) + i \operatorname{Im}\big(\overline{z}(1+2i)\big) = -3\right\}.$$

Najprej izračunamo z^2:

$$\begin{aligned} z^2 &= (x+iy)^2 \\ &= x^2 + 2xyi + y^2 i^2 \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi. \end{aligned}$$

Zato je

$$\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2.$$

Nato uporabimo $\overline{z} = x - iy$ in izračunamo produkt:

$$\begin{aligned} \overline{z}(1+2i) &= (x-iy)(1+2i) \\ &= x + 2xi - yi - 2yi^2 \\ &= (x+2y) + i(2x-y). \end{aligned}$$

Torej velja

$$\operatorname{Im}\big(\overline{z}(1+2i)\big) = 2x - y.$$

Začetno enačbo zdaj zapišemo v obliki

$$(x^2 - y^2) + i(2x - y) = -3 + 0i.$$

Kompleksni števili sta enaki natanko tedaj, ko sta enaka njuna realna in imaginarna dela. Zato morata hkrati veljati enačbi

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3, \\ 2x - y = 0. \end{cases}$$

Iz druge enačbe dobimo $y = 2x$. To vstavimo v prvo:

$$\begin{aligned} x^2 - (2x)^2 &= -3, \\ x^2 - 4x^2 &= -3, \\ -3x^2 &= -3, \\ x^2 &= 1. \end{aligned}$$

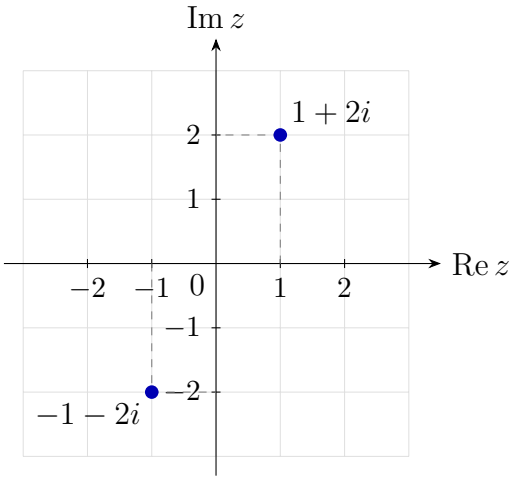
Zato imamo dve možnosti:

$$x = 1, \quad y = 2, \qquad \text{ali} \qquad x = -1, \quad y = -2.$$

Iskana množica je

$$\boxed{\{1 + 2i,\ -1 - 2i\}.}$$

Na sliki označimo **samo dve točki**: $(1, 2)$ in $(-1, -2)$.



(d) **Množica $\{z \in \mathbb{C} : 2(\operatorname{Re} z)^2 + \operatorname{Im} z < 1\}$.**

Ker velja $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, dobimo $2x^2 + y < 1$. Izrazimo y:

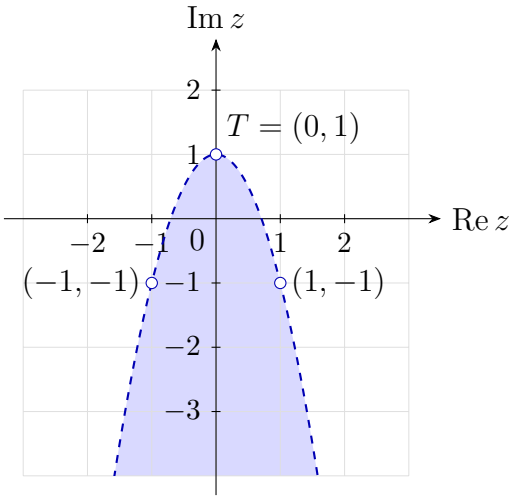
$$\boxed{y < 1 - 2x^2.}$$

Najprej narišemo parabolo $y = 1 - 2x^2$. Njeno teme je $T = (0, 1)$. Parabola je obrnjena navzdol, ker je koeficient pri x^2 negativen.

Za lažjo skico izračunamo še dve točki:

$$x = 1 \implies y = -1, \qquad x = -1 \implies y = -1.$$

Parabola torej poteka skozi točki $(1, -1)$ in $(-1, -1)$. Ker mora veljati $y < 1 - 2x^2$, obarvamo **območje pod parabolo**. Parabola sama **ne spada v množico**, zato jo narišemo s črtkano črto.



$y < 1 - 2x^2$

□

Zapišite v polarni obliki naslednja kompleksna števila:

(a) $z_1 = \sqrt{3} + i$,

(b) $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}\, i$,

(c) $z_3 = -1 - i$,

(d) $z_4 = -3i$.

Rešitev

Za polarni zapis uporabimo obliko

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

kjer je $r = |z|$. Argument φ izberemo v intervalu $[0, 2\pi)$.

(a) $z_1 = \sqrt{3} + i$.

Najprej izračunamo modul:

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2.$$

Realni in imaginarni del sta pozitivna, zato je število v **prvem kvadrantu**. Velja

$$\tan\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{zato je} \qquad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Polarni zapis je

$$\boxed{z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right).}$$

(b) $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}\, i$.

Modul je

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4.$$

Realni in imaginarni del sta negativna, zato je število v **tretjem kvadrantu**. Najprej določimo pripadajoči kot α v prvem kvadrantu:

$$\tan \alpha = \frac{|-2\sqrt{3}|}{|-2|} = \sqrt{3}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

V tretjem kvadrantu velja

$$\varphi = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Zato je

$$\boxed{z_2 = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).}$$

(c) $z_3 = -1 - i$**.**

Modul je

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Število je v **tretjem kvadrantu**. Pripadajoči kot α v prvem kvadrantu določimo iz

$$\tan \alpha = \frac{|-1|}{|-1|} = 1, \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Zato dobimo

$$\varphi = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

Polarni zapis je

$$\boxed{z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).}$$

(d) $z_4 = -3i$**.**

Modul je

$$r = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3.$$

Število leži na **negativnem delu imaginarne osi**, zato je

$$\varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

Torej je

$$\boxed{z_4 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).}$$

□

V polarni obliki izračunajte naslednje izraze, pri čemer uporabite kompleksna števila iz prejšnje vaje:

(a) z_1^6, (b) $z_2^2 z_3$, (c) $\dfrac{z_3}{z_4}$, (d) z_3^{100}.

Rešitev. Uporabimo polarne zapise iz prejšnje vaje:

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$
$$z_2 = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right),$$
$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right),$$
$$z_4 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Pri potenciranju uporabimo De Moivrovo formulo. Pri množenju module množimo in argumente seštejemo. Pri deljenju module delimo in argumente odštejemo. Na koncu rezultate zapišemo v binomski obliki $a + bi$.

(a) **Izračunajmo z_1^6.**

Po De Moivrovi formuli modul potenciramo na šesto potenco, argument pa pomnožimo s 6:

$$z_1^6 = 2^6\left(\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$= 64(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Ker je $\cos\pi = -1$ in $\sin\pi = 0$, dobimo

$$z_1^6 = 64(-1 + 0i) = \boxed{-64 + 0i}.$$

(b) **Izračunajmo $z_2^2 z_3$.**

Najprej kvadriramo z_2:

$$z_2^2 = 16\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right).$$

Nato pomnožimo z z_3. Modula pomnožimo, argumenta pa seštejemo:

$$z_2^2 z_3 = 16\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{8\pi}{3} + \frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{3} + \frac{5\pi}{4}\right)\right).$$

Izračunamo vsoto kotov:

$$\frac{8\pi}{3} + \frac{5\pi}{4} = \frac{32\pi}{12} + \frac{15\pi}{12} = \frac{47\pi}{12}.$$

Odštejemo 2π, da dobimo kot v intervalu $[0, 2\pi)$:

$$\frac{47\pi}{12} - 2\pi = \frac{23\pi}{12} = 2\pi - \frac{\pi}{12}.$$

Zato velja

$$z_2^2 z_3 = 16\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Kot $\pi/12$ zapišemo kot razliko:

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}.$$

Uporabimo formuli za kosinus in sinus razlike:

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \\
\sin\frac{\pi}{12} &= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Vstavimo ti vrednosti in poenostavimo:

$$\begin{aligned}
z_2^2 z_3 &= 16\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \\
&= 4\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - 4\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})i \\
&= \boxed{(8+8\sqrt{3}) + (8-8\sqrt{3})i}.
\end{aligned}$$

(c) **Izračunajmo $\dfrac{z_3}{z_4}$.**

Modula delimo, argumenta pa odštejemo:

$$\frac{z_3}{z_4} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Razlika argumentov je

$$\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{4} - \frac{6\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}.$$

Če prištejemo 2π, dobimo izbrani argument $7\pi/4$. Zato je

$$\frac{z_3}{z_4} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Ker velja

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

dobimo

$$\begin{aligned}\frac{z_3}{z_4} &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \boxed{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i}.\end{aligned}$$

(d) **Izračunajmo z_3^{100}.**

Uporabimo De Moivrovo formulo:

$$\begin{aligned}z_3^{100} &= (\sqrt{2})^{100}\left(\cos\left(100\cdot\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(100\cdot\frac{5\pi}{4}\right)\right)\\ &= 2^{50}\Big(\cos(125\pi) + i\sin(125\pi)\Big).\end{aligned}$$

Kot zmanjšamo za večkratnik 2π:

$$125\pi = 62\cdot 2\pi + \pi.$$

Zato je

$$\cos(125\pi) = \cos\pi = -1, \qquad \sin(125\pi) = \sin\pi = 0.$$

Sledi

$$z_3^{100} = 2^{50}(-1+0i) = \boxed{-2^{50} + 0i}.$$

Pokaži, da je izraz $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ realno število, če sta z_1 in z_2 kompleksni števili za kateri velja $|z_1| = |z_2| = 1$.

Rešitev

Rešitev. Najprej opozorimo, da mora veljati

$$1 + z_1z_2 \neq 0,$$

sicer izraz ni definiran. Trditev torej dokažemo ob tem pogoju.

Označimo

$$w = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2}.$$

Pokazali bomo, da je $\overline{w} = w$. To pomeni, da je w realno število.

1. Uporabimo pogoja $|z_1| = |z_2| = 1$.

Za vsako kompleksno število z velja

$$z\overline{z} = |z|^2.$$

Zato dobimo

$$z_1\overline{z_1} = 1, \qquad z_2\overline{z_2} = 1.$$

Števili z_1 in z_2 sta neničelni, zato lahko delimo:

$$\boxed{\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}, \qquad \overline{z_2} = \frac{1}{z_2}.}$$

2. Izračunamo konjugirano število izraza w.

Uporabimo lastnosti konjugiranja:

$$\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}, \qquad \overline{uv} = \overline{u}\,\overline{v}, \qquad \overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}} \quad (v \neq 0).$$

Sledi

$$\begin{aligned}\overline{w} &= \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)} \\ &= \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\,\overline{z_2}} \\ &= \frac{\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}}{1+\dfrac{1}{z_1z_2}}.\end{aligned}$$

Ulomka v števcu seštejemo, imenovalec pa zapišemo s skupnim imenovalcem:

$$\overline{w} = \frac{\dfrac{z_1+z_2}{z_1z_2}}{\dfrac{1+z_1z_2}{z_1z_2}}.$$

Ker je $z_1z_2 \neq 0$, lahko števec in imenovalec pomnožimo z z_1z_2. Dobimo

$$\overline{w} = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} = w.$$

3. Sklep.

Kompleksno število je realno natanko tedaj, ko je enako svojemu konjugiranemu številu. Ker smo pokazali $\overline{w} = w$, velja

$$\boxed{\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \mathbb{R}, \qquad \text{če je } 1+z_1z_2 \neq 0.}$$

□

Poiščite vsa naravna števila n, za katera je število $(1+i\sqrt{3})^n$

a) pozitivno realno število;

b) negativno realno število;

c) čisto imaginarno število.

Rešitev

Rešitev. Najprej število $1+i\sqrt{3}$ zapišemo v polarni obliki. Njegov modul je

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Število leži v prvem kvadrantu. Ker velja

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

dobimo

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Po De Moivrovi formuli je

$$\boxed{(1+i\sqrt{3})^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right).}$$

Ker je $2^n > 0$, je vrsta dobljenega števila odvisna od kota $\dfrac{n\pi}{3}$.

V nadaljevanju uporabljamo dogovor $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

a) **Pozitivno realno število.**

Število je pozitivno realno, če je njegov imaginarni del enak nič, realni del pa pozitiven. Zato mora veljati

$$\sin\frac{n\pi}{3} = 0, \qquad \cos\frac{n\pi}{3} > 0.$$

Oba pogoja sta izpolnjena natanko tedaj, ko je kot celoštevilski večkratnik 2π:

$$\frac{n\pi}{3} = 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Od tod dobimo

$$n = 6k.$$

Ker mora biti $n \geq 1$, je $k \geq 1$.

Torej so rešitve

$$\boxed{n \in \{6, 12, 18, 24, \ldots\}.}$$

Za te vrednosti velja

$$(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n > 0.$$

b) **Negativno realno število.**

Tokrat mora biti imaginarni del enak nič, realni del pa negativen:

$$\sin \frac{n\pi}{3} = 0, \qquad \cos \frac{n\pi}{3} < 0.$$

To velja natanko tedaj, ko je kot lihoštevilski večkratnik števila π:

$$\frac{n\pi}{3} = (2k + 1)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Zato je

$$n = 3(2k + 1) = 6k + 3.$$

Pogoj $n \geq 1$ pomeni $k \geq 0$.

Torej so rešitve

$$\boxed{n \in \{3, 9, 15, 21, \ldots\}.}$$

Za te vrednosti velja

$$(1 + i\sqrt{3})^n = -2^n < 0.$$

c) **Čisto imaginarno število.**

Čisto imaginarno število ima realni del enak nič in imaginarni del različen od nič. Zato bi moralo veljati

$$\cos \frac{n\pi}{3} = 0.$$

Kosinus je enak nič natanko pri kotih

$$\frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Enačbo pomnožimo s $\frac{6}{\pi}$:

$$2n = 3 + 6k.$$

Leva stran je sodo število, desna stran pa liho število. To ni mogoče.

Zato

$$\boxed{\text{ni naravnega števila } n, \text{ za katero je izraz čisto imaginaren.}}$$

□

V množici $\mathbb{C}$ reši enačbe:

(a) $z^6 = 1$, (b) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$, (c) $z^2 - (1-4i)z - 5 - 5i = 0$.

Rešitev

Rešitev.

(a) **Enačba $z^6 = 1$.**

Število 1 zapišemo v polarni obliki:

$$1 = \cos 0 + i \sin 0.$$

Iščemo vse šeste korene števila 1. Uporabimo formulo

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{6}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, 5.$$

Torej velja

$$z_k = \cos\frac{k\pi}{3} + i \sin\frac{k\pi}{3}.$$

Vstavimo vseh šest vrednosti k:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1, \\
z_1 &= \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\
z_2 &= \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\
z_3 &= \cos\pi + i \sin\pi = -1, \\
z_4 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\
z_5 &= \cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.
\end{aligned}$$

Sklep. Množica vseh rešitev je

$$\boxed{\left\{1,\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.}$$

Vseh šest rešitev leži na enotski krožnici. Tvorijo oglišča pravilnega šestkotnika.

(b) **Enačba $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\,i$.**

Najprej desno stran zapišemo v polarni obliki. Izračunamo njen modul:

$$r = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 192} = 16.$$

Realni del je negativen, imaginarni del pa pozitiven. Zato je število v drugem kvadrantu. Pripadajoči kot α v prvem kvadrantu določa enačba

$$\tan \alpha = \frac{|8\sqrt{3}|}{|-8|} = \sqrt{3}.$$

Torej je $\alpha = \pi/3$, izbrani argument pa

$$\varphi = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Zato velja

$$-8 + 8\sqrt{3}\, i = 16 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Modul vsakega četrtega korena je $\sqrt[4]{16} = 2$. Po formuli za korene dobimo

$$\begin{aligned} z_k &= 2 \left(\cos \left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) \right) \\ &= 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \right) \right), \qquad k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Izračunamo vse štiri korene:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i, \\ z_1 &= 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -1 + \sqrt{3}\, i, \\ z_2 &= 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} - i, \\ z_3 &= 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}\, i. \end{aligned}$$

Sklep. Množica vseh rešitev je

$$\boxed{\left\{ \sqrt{3} + i,\ -1 + \sqrt{3}\, i,\ -\sqrt{3} - i,\ 1 - \sqrt{3}\, i \right\}.}$$

(c) **Enačba $z^2 - (1 - 4i)z - 5 - 5i = 0$.**

Uporabimo formulo za rešitvi kvadratne enačbe. Koeficienti so

$$a = 1, \qquad b = -(1 - 4i) = -1 + 4i, \qquad c = -5 - 5i.$$

Najprej izračunamo diskriminanto:

$$\begin{aligned} D = b^2 - 4ac &= (-1 + 4i)^2 - 4(-5 - 5i) \\ &= 1 - 8i + 16i^2 + 20 + 20i \\ &= 1 - 8i - 16 + 20 + 20i \\ &= 5 + 12i. \end{aligned}$$

Nato poiščemo kvadratna korena diskriminante.

Iščemo število $w = u + iv$, kjer sta $u, v \in \mathbb{R}$, za katero velja

$$w^2 = 5 + 12i.$$

Razširimo kvadrat:

$$(u + iv)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi.$$

Primerjamo realna in imaginarna dela:

$$u^2 - v^2 = 5, \qquad 2uv = 12.$$

Iz modulov obeh strani enačbe $w^2 = 5 + 12i$ dobimo še

$$u^2 + v^2 = |w|^2 = |w^2| = |5 + 12i| = \sqrt{25 + 144} = 13.$$

Zato velja

$$\begin{aligned} 2u^2 = 13 + 5 = 18 \quad &\Longrightarrow \quad u^2 = 9, \\ 2v^2 = 13 - 5 = 8 \quad &\Longrightarrow \quad v^2 = 4. \end{aligned}$$

Ker je $uv = 6 > 0$, imata u in v enak predznak. Kvadratna korena diskriminante sta torej

$$w = 3 + 2i \qquad \text{in} \qquad w = -3 - 2i.$$

Uporabimo formulo za rešitvi:

$$z = \frac{1 - 4i \pm (3 + 2i)}{2}.$$

Pri predznaku + dobimo

$$z_1 = \frac{1 - 4i + 3 + 2i}{2} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i.$$

Pri predznaku − dobimo

$$z_2 = \frac{1 - 4i - 3 - 2i}{2} = \frac{-2 - 6i}{2} = -1 - 3i.$$

Sklep. Rešitvi sta

$$\boxed{z_1 = 2 - i, \qquad z_2 = -1 - 3i.}$$

Preverjanje. Njuna vsota in produkt sta

$$z_1 + z_2 = 1 - 4i,$$

$$z_1 z_2 = (2 - i)(-1 - 3i) = -2 - 6i + i + 3i^2 = -5 - 5i.$$

Zato lahko začetni polinom razcepimo:

$$z^2 - (1 - 4i)z - 5 - 5i = \Big(z - (2 - i)\Big)\Big(z - (-1 - 3i)\Big).$$

□

Poiščite vse kompleksne rešitve naslednjih enačb.

$$z^4 = (-\sqrt{3} + i)^6 \qquad v^2 = (-\sqrt{3} + i)^3.$$

Študent predlaga, da izraz $\sqrt[4]{(-\sqrt{3} + i)^6}$ poenostavimo v $\sqrt{(-\sqrt{3} + i)^3}$. Preverite, ali s tem dobimo vse vrednosti prvotnega izraza. Če jih ne, določite, katere vrednosti izpustimo.

Rešitev

Rešitev.

Najprej število $-\sqrt{3} + i$ zapišemo v polarni obliki. Njegov modul je

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2.$$

Število leži v drugem kvadrantu. Pripadajoči kot v prvem kvadrantu je $\pi/6$, zato je njegov argument

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Torej velja

$$-\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

a) **Rešimo enačbo $z^4 = (-\sqrt{3}+i)^6$.**

Najprej izračunamo desno stran. Po De Moivrovi formuli dobimo

$$\begin{aligned}(-\sqrt{3}+i)^6 &= 2^6\left(\cos\left(6\cdot\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(6\cdot\frac{5\pi}{6}\right)\right)\\ &= 64\Big(\cos(5\pi)+i\sin(5\pi)\Big)\\ &= -64.\end{aligned}$$

Začetna enačba je zato enakovredna enačbi

$$z^4 = -64.$$

Število -64 ima modul 64 in argument π. Njegovi četrti koreni so

$$z_k = \sqrt[4]{64}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right), \qquad k=0,1,2,3.$$

Ker je $\sqrt[4]{64} = 2\sqrt{2}$, dobimo

$$\begin{aligned}z_0 &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2+2i,\\ z_1 &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -2+2i,\\ z_2 &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -2-2i,\\ z_3 &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2-2i.\end{aligned}$$

Množica vseh rešitev je

$$\boxed{\{2+2i,\ -2+2i,\ -2-2i,\ 2-2i\}.}$$

b) **Rešimo enačbo $v^2 = (-\sqrt{3}+i)^3$.**

Najprej izračunamo desno stran:

$$\begin{aligned}(-\sqrt{3}+i)^3 &= 2^3\left(\cos\left(3\cdot\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(3\cdot\frac{5\pi}{6}\right)\right)\\ &= 8\left(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2}\right)\\ &= 8i.\end{aligned}$$

Torej rešujemo enačbo

$$v^2 = 8i.$$

Število $8i$ ima modul 8 in argument $\pi/2$. Njegova kvadratna korena sta

$$v_k = \sqrt{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right), \qquad k = 0, 1.$$

Zato dobimo

$$v_0 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2 + 2i,$$
$$v_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -2 - 2i.$$

Množica vseh rešitev je

$$\boxed{\{2+2i,\ -2-2i\}.}$$

c) **Preverimo študentovo poenostavitev.**

Pri tej nalogi s korenskim zapisom razumemo **vse kompleksne korene**, ne samo ene izbrane vrednosti.

Označimo

$$A = (-\sqrt{3}+i)^3 = 8i.$$

Tedaj je

$$(-\sqrt{3}+i)^6 = A^2.$$

Prvotni izraz zato predstavlja vse rešitve enačbe

$$z^4 = A^2.$$

To enačbo razcepimo:

$$z^4 - A^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (z^2 - A)(z^2 + A) = 0.$$

Zato imamo **dve možnosti**:

$$\boxed{z^2 = A \quad \text{ali} \quad z^2 = -A.}$$

Študentov izraz $\sqrt{A}$ upošteva samo prvo možnost, torej enačbo

$$z^2 = 8i.$$

Tako dobimo samo vrednosti

$$2 + 2i \qquad \text{in} \qquad -2 - 2i.$$

Izpustimo pa rešitvi druge enačbe,

$$z^2 = -8i.$$

Ti sta

$$-2 + 2i \qquad \text{in} \qquad 2 - 2i,$$

saj velja

$$(-2 + 2i)^2 = -8i, \qquad (2 - 2i)^2 = -8i.$$

Sklep. S predlagano poenostavitvijo ne dobimo vseh vrednosti prvotnega izraza. Izpustimo natanko vrednosti

$$\boxed{-2 + 2i \quad \text{in} \quad 2 - 2i.}$$

□

Naj bo $v = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Kompleksna števila določimo rekurzivno s predpisoma

$$z_1 = 1 + v, \qquad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2} \quad \text{za } n \geq 1.$$

Dokažite, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$z_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i, & \text{če je } n \text{ liho,} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i, & \text{če je } n \text{ sodo.} \end{cases}$$

Sklepajte, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $z_n^6 = 1$.

Rešitev

Pokazali bomo, da se v zaporedju izmenjujeta števili

$$a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad b = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Opazimo, da velja $\overline{a} = b$ in $\overline{b} = a$.

1. Izračunamo, kako rekurzivni predpis deluje na a in b.

Najprej izračunamo kvadrat števila a:

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

Zato je

$$1 + a^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = a.$$

Po konjugiranju dobimo

$$\boxed{\overline{1 + a^2} = b.}$$

Podobno velja

$$\begin{aligned} b^2 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

Torej je

$$1 + b^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = b,$$

zato

$$\boxed{\overline{1 + b^2} = a.}$$

Rekurzivni predpis torej število a spremeni v b, število b pa v a.

2. Trditev dokažemo z matematično indukcijo.

Začetni korak. Za $n = 1$ izračunamo

$$z_1 = 1 + v = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = a.$$

Ker je 1 liho število, trditev velja.

Indukcijska predpostavka. Predpostavimo, da za neki $n \geq 1$ velja

$$z_n = \begin{cases} a, & \text{če je } n \text{ liho,} \\ b, & \text{če je } n \text{ sodo.} \end{cases}$$

Indukcijski korak. Pokazati moramo, da ustrezna formula velja tudi za z_{n+1}. Obravnavamo dve možnosti.

- Če je n liho, je po indukcijski predpostavki $z_n = a$. Zato velja

$$z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2} = \overline{1 + a^2} = b.$$

  Ker je $n + 1$ sodo število, dobimo zahtevano vrednost.

- Če je n sodo, je po indukcijski predpostavki $z_n = b$. Zato velja

$$z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2} = \overline{1 + b^2} = a.$$

  Ker je $n + 1$ liho število, tudi v tem primeru dobimo zahtevano vrednost.

Sklep. Po matematični indukciji za vsak $n \geq 1$ velja

$$\boxed{z_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i, & \text{če je } n \text{ liho,} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i, & \text{če je } n \text{ sodo.} \end{cases}}$$

3. Dokažemo še, da je $z_n^6 = 1$.

Obe možni vrednosti imata modul 1. Njuna polarna zapisa sta

$$a = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}, \qquad b = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}.$$

Po De Moivrovi formuli dobimo

$$a^6 = \cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(6 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$$

in

$$b^6 = \cos\left(6 \cdot \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(6 \cdot \frac{5\pi}{3}\right) = \cos(10\pi) + i\sin(10\pi) = 1.$$

Ker je vsak člen z_n enak bodisi a bodisi b, sledi

$$\boxed{z_n^6 = 1 \qquad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}.}$$

□

Analiza I

Dodatne Vaje 1-3

Rešitve

Dokažite, da za vsa naravna števila $n \geq 1$ veljata enakosti:

(a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$,

(b) $3 + 11 + 19 + \ldots + (8n - 5) = 4n^2 - n$.

Rešitev

Obe enakosti bomo dokazali z matematično indukcijo po n.

1. Dokaz enakosti

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Označimo s $P(n)$ trditev, da je vsota prvih n lihih naravnih števil enaka n^2.

Začetni korak. Za $n = 1$ dobimo

$$1 = 1^2.$$

Torej trditev $P(1)$ velja.

Indukcijski korak. Predpostavimo, da za neko naravno število k velja

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2.$$

Dokazati moramo, da velja

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Po indukcijski predpostavki je

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) &= k^2 + (2k + 1) \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Torej velja $P(k + 1)$. Po načelu matematične indukcije velja prva enakost za vsako naravno število $n \geq 1$.

2. Dokaz enakosti

$$3 + 11 + 19 + \ldots + (8n - 5) = 4n^2 - n.$$

Označimo s $Q(n)$ trditev, da je vsota prvih n členov zaporedja $3, 11, 19, \ldots$ enaka $4n^2 - n$.

Začetni korak. Za $n = 1$ dobimo

$$3 = 4 \cdot 1^2 - 1 = 3.$$

Torej trditev $Q(1)$ velja.

Indukcijski korak. Predpostavimo, da za neko naravno število k velja

$$3 + 11 + 19 + \ldots + (8k - 5) = 4k^2 - k.$$

Naslednji člen zaporedja je

$$8(k + 1) - 5 = 8k + 3.$$

Zato je vsota prvih $k + 1$ členov

$$\begin{aligned} 3 + 11 + 19 + \ldots + (8k - 5) + (8k + 3) &= 4k^2 - k + 8k + 3 \\ &= 4k^2 + 7k + 3 \\ &= 4(k + 1)^2 - (k + 1). \end{aligned}$$

Torej velja $Q(k+1)$. Po načelu matematične indukcije velja tudi druga enakost za vsako naravno število $n \geq 1$.

$$\boxed{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \qquad 3 + 11 + 19 + \ldots + (8n - 5) = 4n^2 - n}$$

□

Dokažite, da za vsa naravna števila $n \geq 4$ velja neenakost

$$2^n < n!.$$

Rešitev

Dokazali bomo z matematično indukcijo po n.

Označimo s $P(n)$ trditev

$$P(n): \qquad 2^n < n!.$$

Začetni korak. Za $n = 4$ dobimo

$$2^4 = 16 < 24 = 4!.$$

Torej trditev $P(4)$ velja.

Indukcijski korak. Predpostavimo, da za neko naravno število $k \geq 4$ velja $P(k)$, torej

$$2^k < k!.$$

Dokazati moramo, da velja tudi $P(k+1)$. Pomnožimo indukcijsko neenakost z 2:

$$2^{k+1} < 2k!.$$

Ker je $k \geq 4$, velja $2 < k+1$. Zato

$$2k! < (k+1)k! = (k+1)!.$$

Skupaj dobimo

$$2^{k+1} < (k+1)!.$$

Torej velja $P(k+1)$.

Ker velja začetni korak in ker iz veljavnosti $P(k)$ sledi veljavnost $P(k+1)$, po načelu matematične indukcije za vsa naravna števila $n \geq 4$ velja

$$\boxed{2^n < n!.}$$

□

Izpeljite formulo za število diagonal konveksnega n-kotnika, kjer je $n \geq 4$, in jo nato dokažite s popolno matematično indukcijo.

Rešitev

Označimo s D_n število diagonal konveksnega n-kotnika.

Izpeljava formule. Iz vsakega oglišča lahko potegnemo diagonale do $n-3$ drugih oglišč. Sosednji oglišči sta namreč povezani s stranico, izbranega oglišča pa ne štejemo.

Če štejemo diagonale iz vseh n oglišč, dobimo $n(n-3)$. Pri tem smo vsako diagonalo šteli dvakrat: enkrat pri vsakem od njenih dveh krajišč. Zato je število diagonal

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Dokaz formule z matematično indukcijo.

Označimo s $P(n)$ trditev

$$P(n): \qquad D_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Začetni korak. Za $n = 4$ ima konveksni štirikotnik natanko dve diagonali. Formula da

$$\frac{4(4-3)}{2} = 2.$$

Torej trditev $P(4)$ velja.

Indukcijska predpostavka. Predpostavimo, da za neko naravno število $k \geq 4$ velja

$$D_k = \frac{k(k-3)}{2}.$$

Dokazati moramo, da velja tudi

$$D_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

Indukcijski korak. Konveksni $(k+1)$-kotnik dobimo iz konveksnega k-kotnika tako, da dodamo eno oglišče. Pri tem se ena stranica k-kotnika spremeni v diagonalo $(k+1)$-kotnika. Novo oglišče pa je povezano z diagonalo z vsakim od $k-2$ oglišč, ki mu niso sosednja.

Zato dodamo skupaj $1 + (k-2) = k-1$ novih diagonal. Torej je

$$D_{k+1} = D_k + (k-1).$$

Po indukcijski predpostavki dobimo

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 \\ &= \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} \\ &= \frac{k^2 - k - 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k-2)}{2}. \end{aligned}$$

To je prav formula, ki jo želimo dokazati za $(k+1)$-kotnik. Torej iz $P(k)$ sledi $P(k+1)$.

Ker velja začetni korak in ker iz veljavnosti $P(k)$ sledi veljavnost $P(k+1)$, po načelu matematične indukcije za vsak $n \geq 4$ velja

$$\boxed{D_n = \frac{n(n-3)}{2}.}$$

□

Pokažite, da za vsako naravno število n velja:

(a) $3 \mid 5^n + 2^{n+1}$,

(b) $7 \mid 9^n - 2^n$.

Rešitev

Obe trditvi bomo dokazali z matematično indukcijo po n.

1. Dokaz trditve $3 \mid 5^n + 2^{n+1}$.

Označimo z $P(n)$ trditev

$$P(n): \qquad 3 \mid 5^n + 2^{n+1}.$$

Začetni korak. Za $n = 1$ dobimo

$$5^1 + 2^{1+1} = 5 + 4 = 9.$$

Ker je $9 = 3 \cdot 3$, velja $P(1)$.

Indukcijski korak. Predpostavimo, da za neko naravno število k velja $P(k)$, torej da je $5^k + 2^{k+1}$ deljivo s 3. Dokazati moramo, da je s 3 deljivo tudi $5^{k+1} + 2^{k+2}$. Izraz preoblikujemo:

$$\begin{aligned} 5^{k+1} + 2^{k+2} &= 5 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^{k+1} \\ &= 5\left(5^k + 2^{k+1}\right) - 3 \cdot 2^{k+1}. \end{aligned}$$

Po indukcijski predpostavki je prvi člen deljiv s 3, drugi člen pa je očitno deljiv s 3. Zato je s 3 deljiva tudi njuna razlika. Torej velja $P(k+1)$.

Po načelu matematične indukcije za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$3 \mid 5^n + 2^{n+1}.$$

2. Dokaz trditve $7 \mid 9^n - 2^n$.

Označimo z $Q(n)$ trditev

$$Q(n): \qquad 7 \mid 9^n - 2^n.$$

Začetni korak. Za $n = 1$ dobimo

$$9^1 - 2^1 = 9 - 2 = 7.$$

Ker je 7 deljivo s 7, velja $Q(1)$.

Indukcijski korak. Predpostavimo, da za neko naravno število k velja $Q(k)$, torej da je $9^k - 2^k$ deljivo

s 7. Dokazati moramo, da je s 7 deljivo tudi $9^{k+1} - 2^{k+1}$. Izraz preoblikujemo:

$$\begin{aligned} 9^{k+1} - 2^{k+1} &= 9 \cdot 9^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 9\left(9^k - 2^k\right) + 7 \cdot 2^k. \end{aligned}$$

Po indukcijski predpostavki je prvi člen deljiv s 7, drugi člen pa je očitno deljiv s 7. Zato je s 7 deljiva tudi njuna vsota. Torej velja $Q(k+1)$.

Po načelu matematične indukcije za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

$$7 \mid 9^n - 2^n.$$

$$\boxed{3 \mid 5^n + 2^{n+1} \qquad \text{in} \qquad 7 \mid 9^n - 2^n}$$

za vsako naravno število $n \geq 1$.

□

Naj bo n naravno število. Pokažite, da sta

$$\sqrt{n + \sqrt{n}} \qquad \text{in} \qquad \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

iracionalni števili.

Rešitev

Dokazali bomo, da nobeno od danih števil ni racionalno.

1. število. Predpostavimo, da je

$$q = \sqrt{n + \sqrt{n}}$$

racionalno število. Potem velja

$$\sqrt{n} = q^2 - n.$$

Desna stran je racionalna, zato je tudi $\sqrt{n}$ racionalno število. Ker je n naravno število, mora biti tedaj $\sqrt{n}$ naravno število. Označimo ga z m, torej je $n = m^2$.

Zdaj dobimo

$$q^2 = n + \sqrt{n} = m^2 + m.$$

Število $m^2 + m$ je celo, zato je tudi racionalno število q celo število. Toda za $m \geq 1$ velja

$$m^2 < m^2 + m < (m+1)^2,$$

saj je

$$(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1 > m^2 + m.$$

Torej je q^2 strogo med kvadratoma dveh zaporednih naravnih števil, kar je nemogoče. Zato je

$$\sqrt{n + \sqrt{n}}$$

iracionalno število.

2. število. Predpostavimo, da je

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

racionalno število. Zapišemo ga kot ulomek $\frac{a}{b}$ v okrajšani obliki, kjer sta $a, b \in \mathbb{N}$. Tedaj velja

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{n+1}{n}.$$

Ker sta n in $n+1$ tuji si števili, sta ulomka na obeh straneh okrajšana. Zato mora veljati

$$a^2 = n + 1 \qquad \text{in} \qquad b^2 = n.$$

Torej sta n in $n+1$ kvadrata naravnih števil. Če zapišemo $n = b^2$ in $n + 1 = a^2$, dobimo

$$a^2 - b^2 = 1,$$

zato

$$(a-b)(a+b) = 1.$$

Ker je $a > b \geq 1$, sta oba faktorja pozitivni celi števili, pri čemer je $a + b \geq 3$. Njun produkt zato ne more biti 1. To je protislovje.

Zato je tudi

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

iracionalno število.

$$\boxed{\sqrt{n + \sqrt{n}} \notin \mathbb{Q} \qquad \text{in} \qquad \sqrt{\frac{n+1}{n}} \notin \mathbb{Q}.}$$

□

Naj bosta $k, m \in \mathbb{N}$. Če je

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{k+4\sqrt{m}}-\sqrt{k}\right) \in \mathbb{Z},$$

dokažite, da je $\sqrt{k}$ racionalno število.

Rešitev

Označimo

$$r = \frac{1}{2}\left(\sqrt{k+4\sqrt{m}}-\sqrt{k}\right).$$

Po predpostavki je $r \in \mathbb{Z}$. Ker je $m \geq 1$, je $\sqrt{k+4\sqrt{m}} > \sqrt{k}$, zato je $r > 0$.

Iz definicije števila r sledi

$$\sqrt{k+4\sqrt{m}} = \sqrt{k} + 2r.$$

Kvadriramo obe strani:

$$\begin{aligned} k + 4\sqrt{m} &= (\sqrt{k} + 2r)^2 \\ &= k + 4r\sqrt{k} + 4r^2. \end{aligned}$$

Po odštevanju k in deljenju s 4 dobimo

$$\sqrt{m} = r\sqrt{k} + r^2.$$

Še enkrat kvadriramo:

$$m = (r\sqrt{k} + r^2)^2 = r^2k + 2r^3\sqrt{k} + r^4.$$

Od tod izrazimo $\sqrt{k}$:

$$\sqrt{k} = \frac{m - r^2k - r^4}{2r^3}.$$

Števila m, r, k so cela in $r \neq 0$, zato je desna stran racionalno število. Torej je

$$\boxed{\sqrt{k} \in \mathbb{Q}.}$$

□

Določite vsa naravna števila $n \in \mathbb{N}$, za katera sta $\sqrt{n}$ in $\sqrt{n+2022}$ naravni števili.

Rešitev

Predpostavimo, da tako število n obstaja. Potem sta n in $n + 2022$ popolna kvadrata.

Najprej opazimo, da pri deljenju s 4 kvadrat naravnega števila vedno pusti ostanek 0 ali 1:

$$(2r)^2 = 4r^2 \quad \text{in} \quad (2r+1)^2 = 4r^2 + 4r + 1.$$

Zato noben popoln kvadrat pri deljenju s 4 ne more pustiti ostanka 2 ali 3.

Zdaj pogledamo dve možnosti za kvadrat n.

- Če ima n pri deljenju s 4 ostanek 0, potem ima $n+2022$ ostanek 2, saj ima 2022 ostanek 2. Število $n + 2022$ zato ne more biti popoln kvadrat.
- Če ima n pri deljenju s 4 ostanek 1, potem ima $n + 2022$ ostanek 3. Tudi v tem primeru $n + 2022$ ne more biti popoln kvadrat.

V obeh primerih pridemo do protislovja s predpostavko, da je $n + 2022$ popoln kvadrat. Zato takšno naravno število n ne obstaja:

$$\boxed{\text{Ni takih naravnih števil } n.}$$

□

Pokažite, da $\sqrt{3} + \sqrt{19}$ ni racionalno število.

Rešitev

Dokazujemo s protislovjem. Predpostavimo, da je

$$q = \sqrt{3} + \sqrt{19}$$

racionalno število. Kvadriramo obe strani:

$$\begin{aligned} q^2 &= (\sqrt{3} + \sqrt{19})^2 \\ &= 3 + 2\sqrt{57} + 19 \\ &= 22 + 2\sqrt{57}. \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\sqrt{57} = \frac{q^2 - 22}{2}.$$

Ker je $q \in \mathbb{Q}$, bi bilo tudi $\sqrt{57}$ racionalno število. To je protislovje, saj 57 ni popoln kvadrat, zato je $\sqrt{57}$ iracionalno.

Zato velja

$$\boxed{\sqrt{3} + \sqrt{19} \notin \mathbb{Q}.}$$

□

Pokažite, da $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ ni racionalno število.

Rešitev

Dokazujemo s protislovjem. Predpostavimo, da je

$$q = \sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$$

racionalno število. Ker sta oba seštevanca pozitivna, je $q > 0$.

Iz enakosti $\sqrt[3]{3} = q - \sqrt{2}$ kubiramo obe strani:

$$\begin{aligned} 3 &= (q-\sqrt{2})^3 \\ &= q^3 - 3q^2\sqrt{2} + 6q - 2\sqrt{2} \\ &= q^3 + 6q - (3q^2+2)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\sqrt{2} = \frac{q^3+6q-3}{3q^2+2}.$$

Ker je $q \in \mathbb{Q}$ in $3q^2+2 > 0$, bi bilo tudi $\sqrt{2}$ racionalno število. To je protislovje, saj je $\sqrt{2}$ iracionalno.

Zato velja

$$\boxed{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}.}$$

□

Določi supremum, infimum, minimum in maksimum dane množice, če obstajajo:

$$A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Rešitev

Naj bo

$$A = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad n \geq 1.$$

Za vsak $n \geq 1$ velja

$$0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Zato je 0 spodnja meja, 1 pa zgornja meja množice A.

Infimum in minimum. Pri $n = 1$ dobimo

$$1 - \frac{1}{1} = 0,$$

torej je $0 \in A$. Ker je 0 spodnja meja in hkrati element množice A, je najmanjši element množice A. Zato

$$\inf A = \min A = 0.$$

Supremum. Pokažimo, da je 1 najmanjša zgornja meja množice A. Naj bo $c < 1$. Ker potence števila 10 neomejeno naraščajo, lahko izberemo $N \in \mathbb{N}$ tako veliko, da velja

$$N > \frac{1}{1-c}.$$

Tedaj je

$$\frac{1}{N} < 1 - c,$$

zato

$$1 - \frac{1}{N} > c.$$

Ker je $1 - \frac{1}{N} \in A$, število c ni zgornja meja množice A. Tako nobeno število, manjše od 1, ni zgornja meja. Ker je 1 zgornja meja, dobimo

$$\sup A = 1.$$

Množica A nima maksimuma. Res, naj bo

$$x = 1 - \frac{1}{n} \in A.$$

Potem je

$$1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n} = x.$$

Ker je tudi $1 - \frac{1}{n+1} \in A$, število x ni največji element množice A. To velja za vsak $x \in A$, zato maksimum ne obstaja.

$$\boxed{\inf A = \min A = 0, \qquad \sup A = 1, \qquad \max A \text{ ne obstaja.}}$$

□

Določi supremum, infimum, minimum in maksimum dane množice, če obstajajo:

$$B = \{x^2 - 8x \mid x > 0\}.$$

Rešitev

Naj bo $B = \{x^2 - 8x \mid x > 0\}$. Izraz preoblikujemo z dopolnjevanjem do popolnega kvadrata:

$$x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16.$$

Ker je $(x-4)^2 \geq 0$, za vsak $x > 0$ velja

$$x^2 - 8x \geq -16.$$

Enakost velja pri $x = 4$, zato je $-16 \in B$. Tako je -16 najmanjši element množice B, zato

$$\inf B = \min B = -16.$$

Supremum. Pokažimo, da množica B nima zgornje meje. Naj bo $c \in \mathbb{R}$. Izberimo

$$x = 8 + \sqrt{|c| + 1}.$$

Tedaj je $x > 0$ in

$$x^2 - 8x = \left(8 + \sqrt{|c|+1}\right)^2 - 8\left(8 + \sqrt{|c|+1}\right) = |c| + 1 + 8\sqrt{|c|+1} > c.$$

Torej c ni zgornja meja množice B. Ker to velja za vsako realno število c, množica B nima supremuma v $\mathbb{R}$ in nima maksimuma.

$$\boxed{\inf B = \min B = -16, \qquad \sup B \text{ ne obstaja}, \qquad \max B \text{ ne obstaja}.}$$

□

Določi supremum, infimum, minimum in maksimum dane množice, če obstajajo:

$$C = \{x \mid x^2 \leq 19\}.$$

Rešitev

Naj bo $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 19\}$. Ker je $x^2 \leq 19$ natanko tedaj, ko velja

$$-\sqrt{19} \leq x \leq \sqrt{19},$$

lahko množico C zapišemo kot

$$C = [-\sqrt{19}, \sqrt{19}].$$

Zato je $-\sqrt{19}$ najmanjši element množice C, $\sqrt{19}$ pa njen največji element. Torej velja

$$\boxed{\inf C = \min C = -\sqrt{19}, \qquad \sup C = \max C = \sqrt{19}.}$$

□

Določi supremum, infimum, minimum in maksimum dane množice, če obstajajo:

$$A = \{x \in (0,2) \mid x \text{ ima v decimalnem zapisu vsaj eno enko } \}.$$

Rešitev

Naj bo

$$A = \{x \in (0,2) \mid x \text{ ima v decimalnem zapisu vsaj eno enko}\}.$$

Ker za vsak $x \in A$ velja $0 < x < 2$, je 0 spodnja meja, 2 pa zgornja meja množice A.

Infimum. Za vsako naravno število $n \geq 1$ definiramo

$$x_n = \frac{1}{10^n}.$$

Na primer,

$$x_1 = 0{,}1, \qquad x_2 = 0{,}01, \qquad x_3 = 0{,}001.$$

Vsako število x_n ima v decimalnem zapisu števko 1, zato je $x_n \in A$.

Pokažimo, da je 0 največja spodnja meja množice A. Naj bo $c > 0$. Ker potence števila 10 neomejeno naraščajo, lahko izberemo $N \in \mathbb{N}$, da velja

$$10^N > \frac{1}{c}.$$

Zato je

$$x_N = \frac{1}{10^N} < c.$$

Ker je $x_N \in A$, število c ni spodnja meja množice A. Tako nobeno pozitivno število ni spodnja meja. Ker je 0 spodnja meja, dobimo

$$\inf A = 0.$$

Množica A nima minimuma. Res, naj bo $x \in A$. Potem je $x > 0$. Izberemo $n \in \mathbb{N}$ tako veliko, da velja

$$10^n > \frac{1}{x}.$$

Tedaj je

$$x_n = \frac{1}{10^n} < x.$$

Ker je $x_n \in A$, število x ni najmanjši element množice A. To velja za vsak $x \in A$, zato minimum ne obstaja.

Supremum. Za vsako naravno število $n \geq 1$ definiramo

$$y_n = 2 - \frac{1}{10^n}.$$

Na primer,

$$y_1 = 1{,}9, \qquad y_2 = 1{,}99, \qquad y_3 = 1{,}999.$$

Vsako število y_n ima v decimalnem zapisu števko 1 pred decimalno vejico, zato je $y_n \in A$.

Pokažimo, da je 2 najmanjša zgornja meja množice A. Naj bo $c < 2$. Izberemo $N \in \mathbb{N}$ tako veliko, da velja

$$10^N > \frac{1}{2-c}.$$

Tedaj je

$$\frac{1}{10^N} < 2 - c,$$

zato

$$y_N = 2 - \frac{1}{10^N} > c.$$

Ker je $y_N \in A$, število c ni zgornja meja množice A. Tako nobeno število, manjše od 2, ni zgornja meja. Ker je 2 zgornja meja, dobimo

$$\sup A = 2.$$

Množica A nima maksimuma. Res, naj bo $x \in A$. Potem je $x < 2$. Izberemo $n \in \mathbb{N}$ tako veliko, da velja

$$10^n > \frac{1}{2-x}.$$

Tedaj je

$$y_n = 2 - \frac{1}{10^n} > x.$$

Ker je $y_n \in A$, število x ni največji element množice A. To velja za vsak $x \in A$, zato maksimum ne obstaja.

$\inf A = 0$,	$\sup A = 2$,	$\min A$ ne obstaja,	$\max A$ ne obstaja.

□