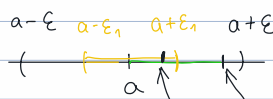
6. 11. 2026

Izrek: Če leži v vsaki okolici števila a neki člen zaporedja a_n, $n \in \mathbb{N}$, ki je različen od a, potem je a stekališče zaporedja a_n.

Dokaz: Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$ in pokažimo, da na $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ leži neskončno členov zaporedja.



$a_{n_0} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ $\quad a_{n_0} \neq a$

$\varepsilon_1 = \frac{|a_{n_0} - a|}{2}$

$a_{n_1} \in (a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1)$

$\varepsilon_2 = \frac{|a_{n_1} - a|}{2}$ $\quad \dots \quad a_{n_0}, a_{n_1}, \dots$

imamo ∞ členov v okolici a. ∎

Izrek: Vsako omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče.

(omejeno: na obe strani!)

Dokaz:



Naj bo a_n omejeno, tj. $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$:

$m \leq a_n \leq M$, za $\forall n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{U} = \{ x \in \mathbb{R} \mid a_n < x$ le za končno (lahko 0) mnogo indeksov $n \}$

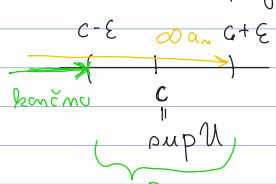
- $\mathcal{U}$ ni prazna: $x = m \Rightarrow m \in \mathcal{U}$ ($a_n < m$ ne velja za nobeno n)
- $\mathcal{U}$ je navzgor omejena: velja: $a_n < M+1$ $\forall n \Rightarrow M+1 \notin \mathcal{U}$

  če je $x \geq M+1$ velja $a_n < M+1 \leq x \Leftarrow \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \notin \mathcal{U}$

  $\mathcal{U}$ je navzgor omejena

↳ Po A13: $\exists \sup \mathcal{U} = c$. Pokazati moramo, da je c stekališče a_n.

Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$. Vemo: c je zgornja meja $\mathcal{U}$:



$c+\varepsilon \notin \mathcal{U} \Rightarrow a_n < c+\varepsilon$ za ∞ mnogo n.

$c-\varepsilon \in \mathcal{U} \Rightarrow a_n < c-\varepsilon$ za končno mnogo n.

$\Rightarrow$ na $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ leži ∞ členov a_n. ∎

KONVERGENTNA ZAPOREDJA

Primer: a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ $\quad a_n = \frac{1}{n}, \; n \in \mathbb{N}$

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{m}, \frac{1}{2m}}$

Def: Število $a \in \mathbb{R}$ je LIMITA ZAPOREDJA $a_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, če za vsak pozitiven $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak drug indeks $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ velja $|a_n - a| < \varepsilon$

$(a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon))$

($a \in \mathbb{R}$ je LIMITA ZAPOREDJA $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \iff \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$)

Opomba: V splošnem je n_0 odvisen od ε, bo zmanjšamo ε proti 0, moramo običajno n_0 povečati.



Primer: 1° $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$\left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$\frac{1}{n+1} \overset{?}{<} \varepsilon \quad \overset{/\cdot(n+1)}{\Rightarrow} \quad 1 < \varepsilon \cdot (n+1) \quad \overset{/:\varepsilon}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{\varepsilon} < n+1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$$

$$n \overset{?}{>} \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Za n_0 izberemo $\mathbb{N} \ni: \; n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

↓ najmanjše

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon$.

2° $a_n = \frac{1}{n^p}$, $p > 0$, DN.: Pokažite, da je $a = 0$ limita.

Zaporedje, ki ima limito se imenuje KONVERGENTNO.

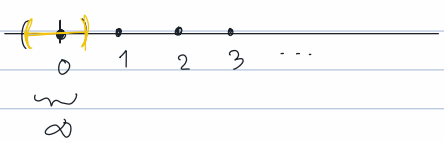
Pravimo tudi, da zaporedje KONVERGIRA proti svoji LIMITI.

Oznaka: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Če zaporedje nima limite, se imenuje DIVERGENTNO.

Primerjava s stekališčem: Limita zaporedja je hkrati tudi stekališče tega zaporedja. Obrat ni vedno res

Primer: $\overset{a_0}{0}, \overset{a_1}{1}, \overset{a_2}{0}, \overset{a_3}{2}, \overset{a_4}{0}, 3, 0, 4, \dots$



$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

V okolici 0 ležijo:

$a_0, a_2, a_4, \dots \dots a_0 \cup \{a_{2m}\}$

$\Downarrow$

0 je stekališče

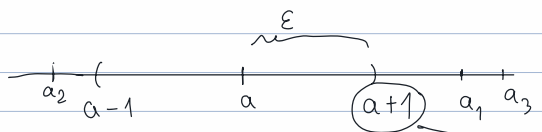
$a_1, a_3, a_5 \dots \in \mathbb{N}$

TRDITEV: Zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je navzgor in navzdol omejeno in ima natanko eno stekališče. V tem primeru je to edino stekališče hkrati limita zaporedja.

Dokaz: ($\Rightarrow$) Denimo, da je zaporedje a_n konvergentno $\Rightarrow \exists$ limita a

$\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ni: \forall n \geq n_0$ velja $|a_n - a| < 1$

izberemo $\varepsilon = 1$



$M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a+1\}$ je zgornja meja zaporedja

$m = \min\{\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}}_{\text{členi } a_n, \text{ ki ležijo zunaj } \varepsilon \text{ okolice}}, a-1\}$ je spodnja meja

Ker je a limita, je tudi <u>stekališče</u>. Prepričati se moramo, da ni nobenega drugega stekališča. Dokaz s protislovjem:

Recimo, da je tudi $b \neq a$ stekališče.



$\varepsilon > 0$ izberemo tako

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \emptyset$

Po def. stekališča leži na $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ ∞ členov a_n.

Vsi ti členi ne ležijo na $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. $\not\Rightarrow$ z def. limite. ⊠

($\Leftarrow$) naslednjič ... 9.11.

NASLEDNJIČ: $\Rightarrow$ CAUCHY-JEV POGOJ

$\Rightarrow$ CAUCHYJEVO ZAPOREDJE

$\Rightarrow$ LIMITE MONOTONIH ZAPOREDIJ