Analiza I

Vaje 5

Množice in preslikave

Naloga 1. Poiščite bijekcije:

(a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$,

(b) $f\colon \mathbb{N} \to (7\mathbb{N}_0 + 2) \cup (7\mathbb{N}_0 + 4)$.

Naloga 2. Poiščite bijekcije:

(a) $f\colon (0,1) \to (a,b)$, pri čemer sta $a, b \in \mathbb{R}$ in $a < b$,

(b) $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$,

(c) $f\colon (a,\infty) \to \mathbb{R}$.

Naloga 3. Naj bo $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ funkcija, podana s predpisom

$$h(a) = \begin{cases} 2a+1, & \text{če } a \geq 0, \\ -2a, & \text{če } a < 0. \end{cases}$$

(a) Dokažite, da je h bijektivna, tako da pokažete, da je injektivna in surjektivna.

(b) Spomnimo se, da je funkcija bijektivna natanko tedaj, ko je obrnljiva. Poiščite funkcijo $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, za katero velja

$$h \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}} \qquad \text{in} \qquad g \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}\,.$$

(c) Dokažite, da imata množici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ enako moč.

Naloga 4. Naj bo $h\colon (0,\infty) \to (0,1)$ funkcija, podana s predpisom

$$h(x) = \frac{x}{x+1}.$$

Dokažite, da je h bijektivna, in sklepajte, da imata množici $(0,\infty)$ in $(0,1)$ enako moč.

Naloga 5. Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pri čemer velja $a < b$ in $c < d$.

(a) Dokažite, da imata intervala (a,b) in (c,d) enako moč.

(b) Dokažite, da imata intervala $[a,b]$ in $[c,d]$ enako moč.

Naloga 6. Dokažite, da imajo množice $(0,1)$, $(0,\infty)$, $(1,\infty)$ in $\mathbb{R}$ enako moč.

Naloga 7. Dokažite, da imajo množice $[0,1]$, $(0,1)$, $(0,1]$ in $[0,1)$ enako moč.