Ker je a limita, je tudi <u>stekališče</u>. Prepričati se moramo, da ni nobenega drugega stekališča. Dokaz s protislovjem:

Recimo, da je tudi $b \neq a$ stekališče.



$\varepsilon > 0$ izberemo tako $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \emptyset$

Po def. stekališča leži na $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ ∞ členov a_n.

Vsi ti členi ne ležijo na $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. $\not\Rightarrow$ iz def. limite. ☒

($\Leftarrow$) naslednjič ... 9.11.

NASLEDNJIČ: $\Rightarrow$ CAUCHY-JEV POGOJ

$\Rightarrow$ CAUCHYJEVO ZAPOREDJE

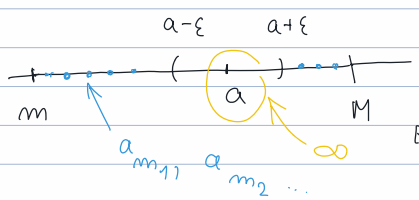
$\Rightarrow$ LIMITE MONOTONIH ZAPOREDIJ

9.11.2026

($\Leftarrow$) Privzamemo, da je a_n omejeno in ima natanko eno stekališče $a \in \mathbb{R}$. RBD: a je limita tega zaporedja.

Dokaz s protislovjem: Recimo, da za nek ε pogoj v definiciji ni izpolnjen, tj.: izven $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ leži ∞ členov zaporedja, naj bodo to: $a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m_3}, \ldots$

↑ To je PODZAPOREDJE ZAPOREDJA $a_1, a_2, a_3, \ldots$



↖ Po izreku o obstoju stekališč ima zaporedje $a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m_3}, \ldots$ vsaj eno stekališče, označimo ga z b. Po konstrukciji $a \neq b$, saj ležijo

vsi členi zaporedja $a_{m_1}, a_{m_2}, \dots$ izven ε-okolice a.

To je v $\not\Rightarrow$ s predpostavko, da imamo samo eno stekališče.

Torej je a res limita. ▨

Def. Zaporedje $a_1, a_2, \dots$ zadošča CAUCHY-JEVEMU POGOJU (Augustin Louis Cauchy 1789 - 1857), če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za vsak par indeksov $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ velja $|a_n - a_m| < \varepsilon$

Tj. razdalja med členi zaporedja gre proti 0.

Zaporedje, ki zadošča temu pogoju se imenuje CAUCHYJEVO ZAPOREDJE.

Izrek: (Cauchy) Zaporedje (v $\mathbb{R}$ in v $\mathbb{C}$) je konvergentno natanko tedaj, ko je Cauchyjevo.

Dokaz: ($\Rightarrow$) Recimo, da je zaporedje a_n konvergentno z limito a. Izberemo $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni: \forall n \geq n_0$ velja $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Izberemo $m \in \mathbb{N} \ni: m \geq n_0 \ni: |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}}_{\varepsilon}$

($\Leftarrow$) Predpostavimo, da je zaporedje Cauchyjevo. RBD: zaporedje je OMEJENO IN IMA ENO STEKALIŠČE.

a) Zaporedje je omejeno: Naj bo $n_0 \in \mathbb{N}$ tak indeks, ki zadošča Cauchyjevemu pogoju. Naj bo $\varepsilon = 1$. Vzemimo $m = n_0$, $n \geq n_0$. Cauchyjev pogoj pove: $|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon = 1$

$M = \max \{ \underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_{(n_0-1)}}_{\text{razen } \in \text{ okolice } a_{n_0}}, a_{n_0}+1 \}$ $\quad \forall n \geq n_0$

$m = \min \{ a_1, a_2, \ldots, a_{(n_0-1)}, a_{n_0}-1 \}$

Po izreku o obstoju stekališč $\Rightarrow$ zaporedje ima vsaj eno stekališče.

b) Pokažimo, da je to edino stekališče oz. limita zaporedja.

D.N.