1. naloga

(a) Pokaži, da je vsaka babilonska iteracija (torej metoda za iskanje ničel polinomov $f(x) = x^2 - a, a \in \mathbb{C} \setminus 0$) konjugirana preslikavi $g(x) = x^2$. Kateri preslikavi je konjugirana babilonska iteracija za $f(x) = x^2$? (b) Pokaži, da je vsaka logistična preslikava $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ konjugirana preslikavi $f_{2-\mu}(x)$; konjugacijska preslikava je linearna.

2. naloga

(a) Pokaži, da je relacija 'biti konjugiran' ekvivalenčna relacija. (b) Pokaži, da če sta $f : X \to X$ in $g : Y \to Y$ konjugirani, sta tudi f^n in g^n. (c) Pokaži, da konjugiranje slika fiksne točke na fiksne točke in iz tega sklepaj, da konjugacijska preslikava slika n-cikle ene preslikave (bijektivno) na n-cikle druge preslikave. (d) Naj bodo sedaj f, g in konjugacijska preslikava razreda C^1, $X = Y = \mathbb{R}$. Pokaži, da konjugacijska preslikava slika privlačne (odbojne, nevtralne) n-cikle na privlačne (odbojne, nevtralne) n-cikle in območja privlaka na območja privlaka.

3. naloga

(a) Pokaži, da je preslikava $f(x) = 1 - 2x^2 : [-1, 1] \to [-1, 1]$ konjugirana $g(x) = 1 - 2|x| : [-1, 1] \to [-1, 1]$ s konjugacijsko preslikavo $\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin x$. (b) Pokaži, da je preslikava $f_4(x) = 4x(1 - x) : [0, 1] \to [0, 1]$ konjugirana f in preslikava g konjugirana šotorski preslikavi $T(x) = 1 - |2x - 1| : [0, 1] \to [0, 1]$. Iz tega sklepaj, da sta f_4 in T konjugirani in poišči konjugacijsko preslikavo.

4. naloga

Naj bo $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ in $(X, |\cdot|)$ metrični prostor z običajno metriko. Naj bo $f : X \to X$ razreda C^1 in a njena privlačna fiksna točka. Pokaži, da je območje privlaka odprta množica.

1. naloga

(Ponudba in povpraševanje) V spošnem imamo dano ponudbo $S(p)$ in povpraševanje $D(p)$ v odvisnosti od cene. Zanima nas stabilnost ravnovesja med ponudbo in povpraševanjem. Denimo, da naš sistem ni v ravnovesju, $D(p) \neq S(p)$. Ali se bo po nekem času ravnovesje vzpostavilo? Ekonomisti predpostavijo dve osnovni obliki vedenja tega sistema. Vpeljimo še nekaj oznak. Naj bo p povpraševana cena in $p_d(q)$ povpraševana cena po količini q inverzna funkcija funkcije $D(p)$. Podobno je $p_s(q)$ inverzna funkcija funkcije $S(p)$. Naj velja $D(0) > S(0)$.

1. Walrasova predpostavka pravi, da če je presežno povpraševanje $E(p) = D(p) - S(p)$ pozitivno, se cena dvigne. Torej, če je na trgu pomanjkanje dobrine, so kupci pripravljeni plačati višjo ceno:

$$p'(t) = f(D(p(t)) - S(p(t))) = f(E(p(t))),$$

kjer je f razreda C^2, konkavna (prilagajanje je počasnejše pri večjih razlikah), enakega znaka kot njen argument, enaka 0 v točki 0 in velja $f'(0) > 0$. (a) Če enačbo integriramo od n do $n+1$, kjer integral desne aproksimiramo s ploščino pravokotnika s stranico $f(E(p(n))$, dobimo diskretizacijo

$$p(n+1) - p(n) = f(E(p(n)).$$

(b) Če enačbo integriramo od n do $n+1$ po trapezni metodi, dobimo diskretizacijo

$$p(n+1) - p(n) = f(E(p(n)) + (1/2)\frac{d}{dt}f(E(p(t))|_{t=n}.$$

Odvod $p'(n)$ nadomestimo z diferenco $p(n) - p(n-1)$. Walrasova predpostavka pomeni, da bo sistem stabilen, če bo povečana cena povzročila zmanjšanje presežnega povpraševanja:

$$E'(p) = D'(p) - S'(p) < 0.$$

2. Marshallova predpostavka pravi, da se količina $S(p)$ poveča, če je presežna povpraševana cena pozitivna in se zmanjša v nasprotnem primeru. To pomeni, da če so kupci pripravljeni plačati višjo ceno, lahko proizvajalci s povečanjem proizvodnje pridejo do dobička.

$$q(t+1) - q(t) = g(p_d(q(t)) - p_s(q(t))),$$

g ima iste lastnosti kot f. Po Marshallu stabilost pomeni, da pozitivna presežna povpraševana cena $E^{-1}(q)$ povzroči naraščanje proizvodnje, kar povzroči njeno zmanjšanje, torej

$$E^{-1\prime}(q) = p_d'(q) - p_s'(q) < 0.$$

Pokaži, da funkciji $f(x) = g(x) = \mathrm{arctg}(x/c), c > 0$ ustrezata predpostavkam. Predpostavi, da sta D, S linearni funkciji svojih argumentov, zapiši oba modela, poišči rešitve in obravnavaj stabilnost.

2. naloga

Poišči funkciji $f(x,c), g(x,c)$ kjer je c parameter, da bo imela $f(x,c)$ tangentno bifurkacijo, g pa podvojitveno pri $x = 0$ pri $c = 0$. Oba primera tudi čimbolje analiziraj (tudi numerično).

1. naloga

Zapiši diskretni model plen plenilec in ga analiziraj v odvisnosti od parametrov. Zapiši še diskretni model plen plenilec z logistično rastjo plena in ga analiziraj. Posamezne tipe stacionarnih točk predstavi s simulacijo.

2. naloga

Predpostavimo, da so faktorji prehoda v Leslijevem modelu nelinearni in sicer, da velja

$$X_{n+1} = q(x)LX_n,$$

kjer je $X = (x_1, \ldots, x_k)$, L Leslijeva matrika iz linearnega modela in $x = \sum_1^k x_i$. Predpostavi, da je $q(x)$ faktor, ki modelira logistično rast,

$$q(x) = \frac{K}{K + (\lambda_1 - 1)x},$$

kjer je λ_1 dominantna lastna vrednost Leslijeve matrike in $K > 0$. Obravnavaj stabilnost in vedenje na dolgi rok za matriki

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3a^2/2 & 3a^2/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6a^3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. naloga

Pokaži, da je preslikava Arnoldove mačke kaotična. Pokaži, da je množica periodičnih točk gosta. Potem določi stabilno in nestabilno mnogoterost in pokaži, da sta gosti na torusu, ter da se sekata v gosti množici točk. S pomočjo tega pokaži, da je preslikava topološko tranzitivna.

1. naloga

(samo za finančnike) V modelu parazitoid (P) - gostitelj (N) (Nicholson-Baileyev model) upoštevamo, da je delež gostiteljev $(1-\gamma)$ varen pred parazitoidom:

$$\begin{aligned} N(n+1) &= rN(n)(\gamma e^{-aP(n)} + (1-\gamma)) \\ P(n+1) &= \gamma s N(n)(1-e^{-aP(n)}) \end{aligned}$$

Analiziraj model v odvisnosti od γ.

2. naloga

Izračunaj razdaljo na torusu med točkama $P(1/10, 1/3)$ in $Q(9/10, 2/3)$.

3. naloga

Izračunaj periodo za Arnoldovo preslikavo in raster $n = 50$. Določi točke, ki imajo pri običajni Arnoldovi preslikavi periode 2,3 in 4.

4. naloga

Naj bo A avtomorfizem torusa induciran z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Znotraj ε-okolice točke $(0,0)$ za $\varepsilon = 1/10$ poišči kakšno homoklinično točko k $(0,0)$. (b) Naj bo $\delta = 1/2$. V ε-okolici $(0,0)$, $\varepsilon = 1/10$ poišči takšno točko P in tak m, da bo $d(A^m(P),(0,0)) > \delta$.